evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

4. Derivace funkce

4.2. Derivace elementárních funkcí

Na základě definice derivace lze odvodit **derivace elementárních funkcí**:

.

1. Pro funkci $\boldsymbol{f : y = c}\,, c \in R,$ platí $\boldsymbol{y' = 0}$

(Derivace konstanty je nula)

2. Pro funkci $\boldsymbol{f : y = x^{n}}\,,\ x \in R,\ n \in N,$ platí $\boldsymbol{y' = n\,.\,x^{n-1}}$

3. Pro funkci $\boldsymbol{f : y = \sin x}\,,\ x \in R,$ platí $\boldsymbol{y' = \cos x}$

4. Pro funkci $\boldsymbol{f : y = \cos x}\,,\ x \in R,$ platí $\boldsymbol{y' = -\sin x}$

Při derivování složitějších funkcí využijeme následující větu:

Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jestliže funkce ***u* , *v*** mají v bodě $\boldsymbol{x_0}$ derivaci, má v bodě $\boldsymbol{x_0}$ derivaci i **součet, rozdíl, součin** a pro $v(x_0) \neq 0$ i **podíl** funkcí ***u* ,*v*** a platí:

(1) $$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

(2) $$(u-v)'(x_0) = u'(x_0) - v'(x_0)$$

(3) $$(u.v)'(x_0) = u'(x_0).v(x_0) + u(x_0).v'(x_0)$$

(4) $$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0).v(x_0) - u(x_0).v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

5. Pro funkci $\boldsymbol{f : y = tg\, x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$, platí $\boldsymbol{y' = \frac{1}{cos^2 x}}$

6. Pro funkci $\boldsymbol{f : y = cotg\, x}$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$ platí $\boldsymbol{y' = -\frac{1}{sin^2 x}}$

7. Pro funkci $\boldsymbol{f : y = x^n}$, $x \in R - \{0\}$, $n \in Z^-$, platí $\boldsymbol{y' = n\,.\,x^{n-1}}$

Př. Vypočtěte derivaci funkce $\boldsymbol{f}$ je-li dána předpisem :

a) $f(x) = x^3 + 2x - \sin x + 2$

$$f'(x) = (x^3 + 2x - \sin x + 2)' = (x^3)' + (2x)' - (\sin x)' + (2)' =$$
$$= (3x^{3-1}) + 2(x)' - (\cos x) + (0) = \quad 3x^2 + 2 - \cos x$$

b) $f(x) = x^2 \cos x$

$$f'(x) = (x^2 \cos x)' = (x^2)'.\cos x + x^2.(\cos x)' = 2x^{2-1}.\cos x + x^2.(-\sin x) =$$
$$= 2x.\cos x - x^2 \sin x$$

c) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{(3x-2)'.(x^2+1)-(3x-2).(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(3.1-0).(x^2+1)-(3x-2).(2x+0)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3.(x^2+1)-(3x-2).2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$$

d) $f(x) = tg\ x$

$$f'(x) = (tg\ x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

e) $f(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1-\cos x) - \sin x(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x.(1-\cos x) - \sin x.[0-(-\sin x)]}{(1-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)^2} = \frac{(-1).(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2} = \frac{(-1)}{(1-\cos x)}$$

Při derivování složitějších funkcí využijeme další větu:

Derivace složené funkce

Jestliže funkce $\boldsymbol{z = g(x)}$ má derivaci v bodě $\boldsymbol{x_0}$ a
jestliže funkce $\boldsymbol{y = f(z)}$ má derivaci v bodě $\boldsymbol{z_0 = g(x_0)}$,
má složená funkce $\boldsymbol{y = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)}$ derivaci v bodě $\boldsymbol{x_0}$ a platí:

$$\boldsymbol{y = (f \circ g)'(x) = f'(z_0)\,.\,g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)\,.\,g'(x_0)}$$

Funkce $\boldsymbol{y = f(z)}$ …….vnější funkce
Funkce $\boldsymbol{z = g(x)}$ ……..vnitřní funkce

Př. Vypočtěte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:
a) $y = (x^5 + 2x + 1)^7$

$$\boldsymbol{f'(x)} = \left((x^5 + 2x + 1)^7\right)' = \mathbf{7}.(x^5 + 2x + 1)^{\mathbf{6}}.(x^5 + 2x + 1)' =$$

$$= \mathbf{7}.(x^5 + 2x + 1)^{\mathbf{6}}.\left(\mathbf{5}x^{\mathbf{4}} + 2.\mathbf{1} + \mathbf{0}\right) = \mathbf{7}.(x^5 + 2x + 1)^{\mathbf{6}}.\left(\mathbf{5}x^{\mathbf{4}} + 2\right)$$

b) $y = \sin(x^2 - 3x)$

$f'(x) = (sin(x^2 - 3x))' = \boldsymbol{cos}\,(x^2 - 3x).\big((x^2 - 3x)\big)' =$

$= cos\,(x^2 - 3x).(2x - 3) = (2x-3).cos(x^2 - 3x)$

c) $y = \sin^3 x^2$

$f'(x) = (\sin^3 x^2)' = \mathbf{3}.\sin^{\mathbf{2}} x^2.(x^2)' = \mathbf{3}.\sin^{\mathbf{2}} x^2.2x = 6x.\sin^{\mathbf{2}} x^2$

e) $y = \sin 3x^2$

$f'(\mathrm{x}) = (\sin 3\,\mathrm{x}^2)' = \cos\ \mathbf{3}x^2.(3x^2)' = \cos\ \mathbf{3}x^2.(6\,x) = 6x.\cos\ \mathbf{3}x^2$

f) $y = tg^3\,2x$

$f' = (tg^3\,2x)' = 3.tg^2\,2x\,(2x)' = 3.tg^2\,2x\,.\,2 = 6.tg^2\,2x$

8. Pro funkci $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e^x}$, $x \in R$, platí $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{e^x}$

9. Pro funkci $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a^x}$, $x \in R$, $a \in R^+ - \{1\}$ platí $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{a^x} \,.\, \boldsymbol{ln\, a}$

10. Pro funkci $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{ln\, x}$, $x \in R^+$, platí $\boldsymbol{y}' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}$

11. Pro funkci $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{log_a\, x}$, $x \in R^+$, $a \in R^+ - \{1\}$ platí $\boldsymbol{y}' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x \,.\, ln\, a}}$

12. Pro funkci $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x^n}$, $x \in R^+$, $n \in R$, platí $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{n \,.\, x^{n-1}}$

Př. Vypočtěte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = \frac{x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{2+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)' = \left(x^{\frac{12+2-3}{6}}\right)' = \left(x^{\frac{11}{6}}\right)' = \frac{11}{6}.x^{\frac{11}{6}-1} = \frac{11}{6}.x^{\frac{5}{6}}$$

b) $y = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 0 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{2x^2} = \frac{x.\sqrt{x} - 1\sqrt{x}}{2x^2} = \frac{\sqrt{x}.(x-1)}{2x^2}$$

c) $y = 2x\sqrt{1-x^2}$

$$f'(x) = (2x)'.\sqrt{1-x^2} + 2x.\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = 2.\sqrt{1-x^2} + 2x.\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 2.\sqrt{1-x^2} + 2x.\frac{-2x}{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2(1-x^2) - 2x^2}{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2(1-2x^2)}{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Referenční seznam:

- Hrubý, Dag, Kubát, Josef.
  Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. 2. vydání.
  Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-210-6.

Prezentaci vytvořila ***Mgr. Bc. Eva Vengřínová,*** vyučující předmětu matematika na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.

Prezentace je určena pro podporu výuky matematiky na středních odborných školách stavebních , oboru 78 - 42 - M/01 Technické lyceum.

Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Vytvořeno v rámci projektu OP VK "Nová cesta za vzděláním", registrační číslo CZ.1.07/1.5.00/34.0034,

za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky.