

Výsledky

Př.1. Vypočtěte derivace funkce

a) $y = 4x^3 - 7x^2 + 3x$

$$y' = (4x^3 - 7x^2 + 3x)' = 4 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x + 3 = 12x^2 - 14x + 3$$

b) $y = -x^4 + 7 \sin x - 2 \cos x + 3 e^x$

$$y' = (-x^4 + 7 \sin x - 2 \cos x + 3 e^x)' = -4x^3 + 7 \cos x + 2 \sin x + 3 e^x$$

c) $y = x(x^3 - 1)(x + 2)$

$$y' = (x(x^3 - 1)(x + 2))' = ((x^4 - x)(x + 2))' = (x^5 + 2x^4 - x^2 - 2x)' = 5x^4 + 8x - 2x - 2$$

d) $y = \operatorname{tg} x - x$

$$y' = (\operatorname{tg} x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

e) $y = 3x - 2 \ln x$

$$y' = (3x - 2 \ln x)' = 3 - 2 \cdot \frac{1}{x} = 3 - \frac{2}{x}$$

h) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

$$y' = (\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{1}{(\cos x \sin x)^2}$$

Př.2. Vypočtěte derivace funkce

a) $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x} + 3}{\sqrt{x}}$

$$y' = \left(\frac{2x - \sqrt[3]{x} + 3}{\sqrt{x}} \right)' = \left(\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right)' = \left(2\sqrt{x} - x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} \right)' = \left(2 \cdot x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{6}} + 3x^{-\frac{1}{2}} \right)' =$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{6} \right) x^{-\frac{7}{6}} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} x^{-\frac{7}{6}} - \frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}}$$

b) $y = x \cdot \sin x + \cos x$

$$y' = (x \cdot \sin x + \cos x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x - \sin x = x \cdot \cos x$$

c) $y = x e^x - x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2$

$$y' = \left(x e^x - x^2 \ln x + \frac{1}{2} x^2 \right)' = (x e^x)' - (x^2 \ln x)' + \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x - \left(2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} 2x =$$
$$= e^x + x \cdot e^x - 2x \cdot \ln x - x + x = e^x + x \cdot e^x - 2x \cdot \ln x = e^x \cdot (1 + x) - 2x \cdot \ln x$$

d) $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$

$$y' = \left(\frac{x^4 + 1}{x^2} \right)' = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)' = (x^2 + x^{-2})' = 2x - 2 \cdot x^{-3}$$

e) $y = (1 - x^3)^2$

$$y' = ((1 - x^3)^2)' = 2 \cdot (1 - x^3) \cdot (-3x^2) = 6x^2 \cdot (x^3 - 1)$$

f) $y = 1 + \frac{1}{x^2 - 2x}$

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x^2 - 2x} \right)' = (1 + (x^2 - 2x)^{-1})' = 0 + (-1) \cdot (x^2 - 2x)^{-2} \cdot (2x - 2) = \frac{-(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{2(1 - x)}{(x^2 - 2x)^2}$$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



STŘEDNÍ
PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA
STAVEBNÍ
OŘAVA

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu
"Nová cesta za poznáním", reg. č.
CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory
Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.



Uvedená práce (dílo) podléhá licenci Creative Commons
Uveďte autora-Nevyužívejte dílo komerčně-Zachovejte licenci 3.0 Česko

Př.3. Vypočtěte derivace funkce

a) $y = \sin^4 x$

$$y' = (\sin^4 x)' = 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x$$

b) $y = \sin^3 x^2$

$$y' = (\sin^3 x^2)' = 3 \cdot \sin^2 x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 6x \cdot \sin^2 x^2 \cdot \cos x^2$$

c) $y = \sin 3x^2$

$$y' = (\sin 3x^2)' = \cos 3x^2 \cdot 3 \cdot 2x = 6x \cdot \cos 3x^2$$

d) $y = e^{x^2-2x+1}$

$$y' = (e^{x^2-2x+1})' = e^{x^2-2x+1} \cdot (2x-2) = (2x-2) \cdot e^{x^2-2x+1}$$

e) $y = \ln^3(x^2-1)$

$$y' = (\ln^3(x^2-1))' = 3 \cdot \ln^2(x^2-1) \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x = \frac{6x}{x^2-1} \ln^2(x^2-1)$$

f) $y = \operatorname{tg}^3 2x$

$$y' = (\operatorname{tg}^3 2x)' = 3 \cdot \operatorname{tg}^2 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{6 \operatorname{tg}^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{6 \sin^2 2x}{\cos^4 2x}$$

Př.4. Vypočtěte derivace funkce

a) $y = \frac{x}{x^3+2}$

$$y' = \left(\frac{x}{x^3+2}\right)' = \frac{1 \cdot (x^3+2) - x \cdot (3x^2)}{(x^3+2)^2} = \frac{x^3+2-3x^3}{(x^3+2)^2} = \frac{2-2x^3}{(x^3+2)^2} = \frac{2(1-x^3)}{(x^3+2)^2}$$

b) $y = \frac{x^3}{x^3-1}$

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^3-1}\right)' = \left(\frac{x^3-1+1}{x^3-1}\right)' = \left(\frac{x^3-1}{x^3-1} + \frac{1}{x^3-1}\right)' = \left(1 + \frac{1}{x^3-1}\right)' = 0 + \frac{0 \cdot (x^3-1) - 1 \cdot (3x^2)}{(x^3-1)^2} = \frac{-3x^2}{(x^3-1)^2}$$

c) $y = x^2 e^{x+2}$

$$y' = (x^2 e^{x+2})' = 2x \cdot e^{x+2} + x^2 \cdot e^{x+2} = x \cdot e^{x+2} \cdot (2+x)$$

d) $y = 5^{x^2-1} + 3$

$$y' = (5^{x^2-1} + 3)' = 5^{x^2-1} \cdot \ln 5 \cdot 2x = 2x \cdot \ln 5 \cdot 5^{x^2-1}$$

e) $y = \sqrt{x^2+4x}$

$$y' = (\sqrt{x^2+4x})' = \left((x^2+4x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (x^2+4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+4) = \frac{2x+4}{2 \cdot (x^2+4x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4x}}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{(x+2) \cdot \sqrt{x^2+4x}}{x^2+4x}$$

f) $y = x^2 \sqrt{1+x^2}$

$$y' = (x^2 \sqrt{1+x^2})' = \left(x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = 2x \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2 \cdot \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{2x \cdot (1+x^2) + x^3}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{2x+3x^3}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x \cdot (2+3x^2) \cdot \sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu
"Nová cesta za poznáním", reg. č.
CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory
Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.



Uvedená práce (dílo) podléhá licenci Creative Commons
Uveďte autora-Nevyužívejte dílo komerčně-Zachovejte licenci 3.0 Česko

Př.5. Napište rovnici tečny a normály grafu dané funkce v jeho bodě $T[x_0, y_0]$:

a) $y = x^3, x_0 = -1$

$$y_0 = (-1)^3 = -1 \quad y' = 3x^2 \quad k_t = y'_{(-1)} = 3 \cdot (-1)^2 = 3$$

tečna $t: (y - y_0) = k_t \cdot (x - x_0)$

$$(y + 1) = 3 \cdot (x + 1)$$

$$y = 3x + 2$$

normála $n: (y - y_0) = -\frac{1}{k_t} \cdot (x - x_0)$

$$(y + 1) = -\frac{1}{3} \cdot (x + 1)$$

$$y = -\frac{x}{3} - \frac{4}{3}$$

b) $y = \cos x, x_0 = \frac{1}{6}\pi$

$$y_0 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y' = -\sin x \quad k_t = y'_{\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

tečna $t: (y - y_0) = k_t \cdot (x - x_0)$

$$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{6\sqrt{3} + \pi}{12}$$

normála $n: (y - y_0) = -\frac{1}{k_t} \cdot (x - x_0)$

$$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = 2x + \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{6}$$

c) $y = \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{1}{4}\pi$

$$y_0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad k_t = y'_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$$

tečna $t: (y - y_0) = k_t \cdot (x - x_0)$

$$(y - 1) = 2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

normála $n: (y - y_0) = -\frac{1}{k_t} \cdot (x - x_0)$

$$(y - 1) = -\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

Př.6. Napište rovnici tečny grafu dané funkce v jeho bodě $T[x_0, y_0]$:

a) $y = \frac{3x-1}{2x+3}, x_0 = 0$

$$y_0 = \frac{3 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0 + 3} = -\frac{1}{3}; \quad y' = \frac{3 \cdot (2x+3) - (3x-1) \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{6x+9-6x+2}{(2x+3)^2} = \frac{11}{(2x+3)^2}; \quad k_t = y'_{(0)} = \frac{11}{(2 \cdot 0 + 3)^2} = \frac{11}{9}$$

tečna $t: (y - y_0) = k_t \cdot (x - x_0)$

$$\left(y + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{9} \cdot (x - 0)$$

$$y = \frac{11}{9}x - \frac{1}{3}$$

b) $y = \frac{2x^2-1}{x+1}, x_0 = -\frac{1}{2}$

$$y_0 = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = -1;$$

$$y' = \frac{4x \cdot (x+1) - (2x^2-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{4x^2 + 4x - 2x^2 + 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 4x + 1}{(x+1)^2}$$

$$k_t = y'_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{\left(-\frac{1}{2} + 1\right)^2} = -2$$

tečna $t: (y - y_0) = k_t \cdot (x - x_0)$

$$(y + 1) = -2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$y = -2x - 2$$



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.



Uvedená práce (dílo) podléhá licenci Creative Commons Uveďte autora-Nevyužívejte dílo komerčně-Zachovejte licenci 3.0 Česko

Př.7. Napište rovnici normály grafu dané funkce v jeho bodě $T[x_0, y_0]$:

a) $y = \frac{8}{x^2+4}$, $x_0 = 2$

$$y_0 = \frac{8}{2^2+4} = 1;$$

$$y' = \frac{0 \cdot (x^2+4) - 8 \cdot (2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-16x}{(x^2+4)^2}$$

$$k_t = y'(2) = \frac{-32}{(4+4)^2} = -\frac{1}{2}$$

Normála n: $(y - y_0) = -\frac{1}{k_t} \cdot (x - x_0)$

$$(y - 1) = 2 \cdot (x - 2)$$

$$y = 2x - 3$$

b) $y = x \cdot \ln x$, $x_0 = e$

$$y_0 = e \cdot \ln e = e;$$

$$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$k_t = y'(e) = \ln e + 1 = 2$$

Normála n: $(y - y_0) = -\frac{1}{k_t} \cdot (x - x_0)$

$$(y - e) = -\frac{1}{2} \cdot (x - e)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}e$$



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



STŘEDNÍ
PRŮMYŠLOVÁ ŠKOLA
STAVEBNÍ
OLAFA

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu
"Nová cesta za poznáním", reg. č.
CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory
Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.



Uvedená práce (dílo) podléhá licenci Creative Commons
Uveďte autora-Nevyužívejte dílo komerčně-Zachovejte licenci 3.0 Česko