evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

4. Derivace funkce

4.1. Derivace funkce v bodě

❖ ***Derivace funkce v bodě***

Pojem derivace patří k základním pojmům infinitezimálního počtu.

Pomocí derivace budeme vyšetřovat průběhy funkcí, budeme určovat extrémy veličin, ukážeme si užití derivace v geometrii a fyzice.

Mějme funkci f definovanou v jistém okolí bodu x_0.

Existuje - li limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nebo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

nazýváme ji **derivací funkce v bodě x_0** .

Pozn.: z předcházejícího článku víme , že tato limita udává **směrnici tečny**

$k_T = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ....grafu funkce f v bodě $T[x_0; y_0]$

Derivaci funkce značíme .... $f'(x_0)$ nebo také $y'(x_0)$.

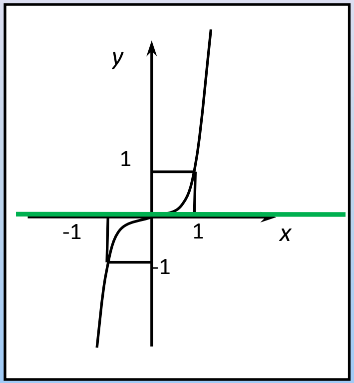
Je-li $f'(x_0) \in R$ pak říkáme, že **funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci** .

Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$ pak říkáme, že **funkce f má v bodě x_0 nevlastní derivaci** .

Př. Vypočtěte derivaci funkce ***f*** v bodě $x_0 = 0$, jestliže :

a) $f: y = x^3$

$$f'(0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 0^3}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

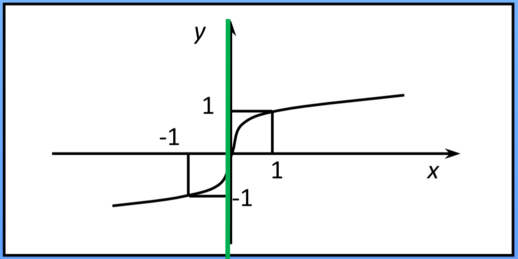


Pozn.: tato limita udává **směrnici tečny** v bodě $x_0 = 0$.
Směrnice tečny $k_T = tg\,\varphi = 0$ odtud $\varphi = 0°$

b) $f: y = \sqrt[3]{x}$

$$f'(0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Tato limita udává **směrnici tečny** v bodě $x_0 = 0$.
Směrnice tečny $k_T = tg\,\varphi = +\infty$ odtud $\varphi = 90°$



❖ *Geometrická interpretace derivace v bodě:*

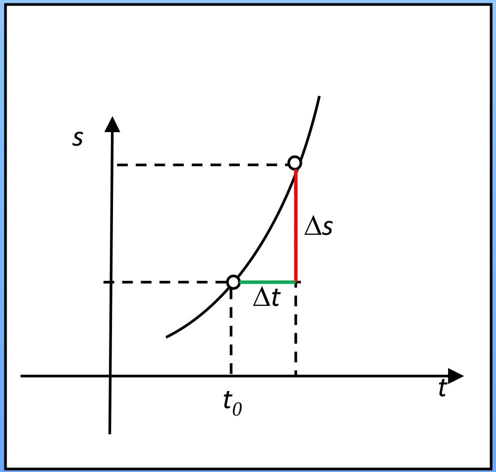
Směrnice tečny grafu funkce: $k_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Rovnice tečny v bodě $T[x_0; y_0]$ je:

$$\boxed{y - y_0 = f'_{(x_0)} . (x - x_0)}$$

❖ *Fyzikální interpretace derivace v bodě:*

Okamžitá rychlost ***v*** v čase ***t_0*** :



$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s_{(t_0 + \Delta t)} - s_{(t_0)}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} a (t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} a {t_0}^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a t_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} a t_0 + \frac{1}{2} a \Delta t = a . t_0$$

❖*Derivace funkce v intervalu (a , b)*

Funkce *f* má v intervalu (*a* , *b*) derivaci, jestliže:

- má derivaci v každém bodě $x \in (a,b)$

Derivace funkce *f* v bodě x_0 zleva:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Derivace funkce *f* v bodě x_0 zprava:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

❖*Derivace funkce v intervalu ⟨ a , b ⟩*

Funkce *f* má v intervalu ⟨ *a* , *b* ⟩ derivaci, jestliže:

- má derivaci v každém bodě $x \in (a,b)$
- má bodě ***a*** derivaci zprava
- má v bodě ***b*** derivaci zleva .

Př.: Na základě <u>definice</u> derivace funkce v bodě vypočtěte derivace funkcí v bodě X_0

a) $y = 5$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{5 - 5}{x - x_0} = 0$$

b) $y = 2x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2x - 2x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2.(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2 = 2$$

c) $y = x^3 - 1$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x^3 - 1) - ({x_0}^3 - 1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - {x_0}^3}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0).(x^2 + x.x_0 + {x_0}^2)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + x.x_0 + {x_0}^2) = 3.{x_0}^2$$

Referenční seznam:

- Hrubý, Dag, Kubát, Josef.
  Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. 2. vydání.
  Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-210-6.

Prezentaci vytvořila ***Mgr. Bc. Eva Vengřínová,*** vyučující předmětu matematika na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.

Prezentace je určena pro podporu výuky matematiky na středních odborných školách stavebních , oboru 78 - 42 - M/01 Technické lyceum.

Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Vytvořeno v rámci projektu OP VK "Nová cesta za vzděláním", registrační číslo CZ.1.07/1.5.00/34.0034,

za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky.

Uvedená práce (dílo) podléhá licenci Creative Commons.

Uveďte autora - Nevyužívejte dílo komerčně - Zachovejte licenci 3.0 Česko.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ