Výsledky

Př.1. Na základě definice derivace funkce v bodě vypočtěte derivace funkcí v bodě $\boldsymbol{x_0}$.

a) $f_1: y = -3x + 1$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(-3x+1) - (-3x_0+1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-3x + 3x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-3.(x - x_0)}{x - x_0} = -3$$

b) $f_2: y = 1 - x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(1 - x^2) - (1 - {x_0}^2)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-x^2 + {x_0}^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 + x).(x_0 - x)}{(-1).(x_0 - x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 + x)}{(-1)} = -\,2x_0$$

c) $f_3: y = \frac{1}{x}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x.x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 - x)}{xx_0.(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x.x_0} = \frac{-1}{{x_0}^2} = -{x_0}^{-2}$$

d) $f_4: y = x^2 + x + 1$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 + x + 1) - ({x_0}^2 + x_0 + 1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x - {x_0}^2 - x_0}{x - x_0} = = \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 - {x_0}^2) + (x - x_0)}{(x - x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0).(x - x_0) + (x - x_0)}{(x - x_0)} = = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0).[(x + x_0) + (x - x_0)]}{(x - x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0).[2x]}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} 2x = 2x_0$$

e) $f_5: y = x + \frac{1}{x}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x + \frac{1}{x} - \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{{x_0}^2 + 1}{x_0}}{x - x_0} = = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0.(x^2 + 1) - x.({x_0}^2 + 1)}{x.x_0}}{(x - x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2.x_0 + x_0 - x.{x_0}^2 - x}{x.x_0.(x - x_0)} = = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2.x_0 - x.{x_0}^2 - x + x_0}{x.x_0.(x - x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x.x_0.(x - x_0) - (x - x_0)}{x.x_0.(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0).(x.x_0 - 1)}{x.x_0.(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x.x_0 - 1)}{x.x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} 1 - \frac{1}{x.x_0} = 1 - \frac{1}{{x_0}^2}$$

Př.2. Užitím definice derivace vypočtěte derivaci funkce v daném bodě $\boldsymbol{x_0}$.

a) $f_1: y = x^2 - 4x\,, x_0 = 1$

$$f(x_0) = 1^2 - 4.1 = -3$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 4x) - (-3)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1).(x - 3)}{(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x - 3) = -2$$

b) $f_2: y = \sqrt{x}\,, x_0 = 1$

$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1).(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.

c) $f_3: y = x^2 + 2x\ , x_0 = -1$

$f(-1) = (-1)^2 + 2.(-1) = -1$

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+2x)-(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)} = \lim_{x\to -1} (x+1) = 0$$

d) $f_4: y = \sin x\ , x_0 = \frac{\pi}{4}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$ $\qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}.\frac{\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}.\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2} == \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e) $f_5: y = 1 + \cos x\ , x_0 = \frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$ $\qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right).\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}} = -\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2} == -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

f) $f_6: y = \frac{x+1}{2x-1}\ , x_0 = -2$

$$f(-2) = \frac{-2+1}{2.(-2)-1} = \frac{1}{5}$$

$$f'(-2) = \lim_{x\to -2} \frac{\frac{x+1}{2x-1}-\frac{1}{5}}{x-(-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{\frac{5.(x+1)-(2x-1)}{(2x-1).5}}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{5.(x+1)-(2x-1)}{(2x-1).5.(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{5x+5-2x+1}{(2x-1).5.(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{3x+6}{(2x-1).5.(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{3.(x+2)}{(2x-1).5.(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{3}{(2x-1).5} = -\frac{3}{25}$$

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.