evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

1. Elementární funkce

1.2. Přehled elementárních funkcí

- ***Lineární funkce***

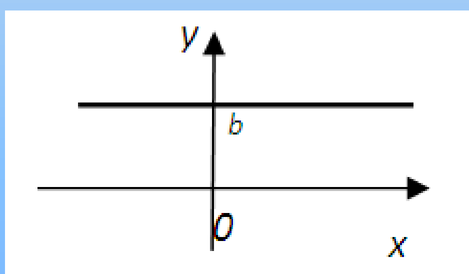
- je každá funkce na množině R, která je dána ve tvaru ***y = a.x + b***, kde *a,b* $\in$ *R* .

Pokud *a = 0*, pak funkci ve tvaru ***y = b***, nazýváme ***konstantní funkce.***

Pokud *b = 0*, pak funkci ve tvaru ***y = a.x***, nazýváme ***přímá úměrnost.***

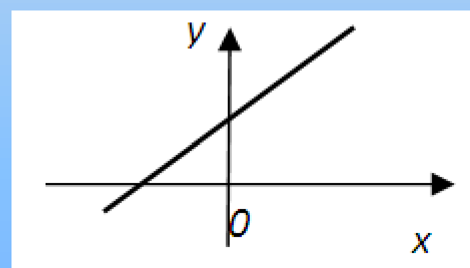
- **Grafem** lineární funkce ***y = a.x + b*** je ***přímka*** nebo její část.

a = 0



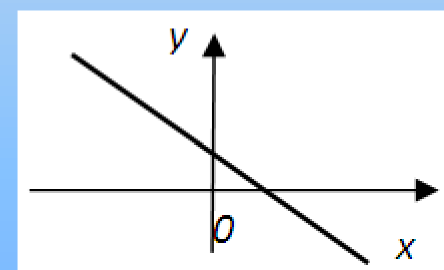
Není prostá.
Není rostoucí, ani klesající.
Je omezená.
V každém bodě x$\in$R má maximum a minimum.

a > 0



Je rostoucí
Není shora omezená.
Není zdola omezená.
Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum.

a < 0



Je klesající.
Není shora omezená.
Není zdola omezená.
Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum

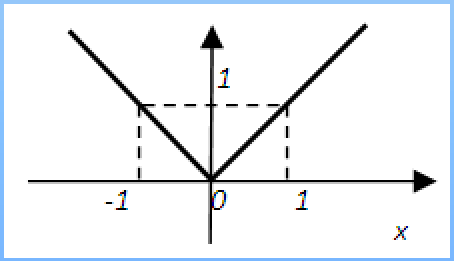
- ***Funkce s absolutními hodnotami***

Absolutní hodnota reálného čísla ***a*** je číslo **|*a*|** , pro které platí:

je-li $a \geq 0$ je $|a| = a$,

je-li $a < 0$ je $|a| = -a$.

- ***Funkce*** $y = |x|$,



$D(f) = R$

$H(f) = \langle 0;+\infty)$

- je klesající v intervalu $(-\infty;0\rangle$

- je rostoucí v intervalu $\langle 0;+\infty)$

-je zdola omezená, není shora omezená

- v bodě 0 má minimum

- nemá v žádném bodě maximum.

- ***Kvadratická funkce***
  - je každá funkce na množině R daná ve tvaru :
  $y = a.x^2 + b.x + c$, kde $a \in R \setminus \{0\}$, $b, c \in R$.

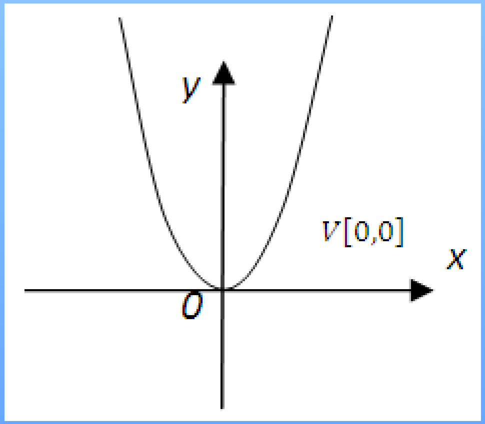
- **Grafem** kvadratické funkce je ***parabola***.

Vrchol paraboly: $V = \left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$

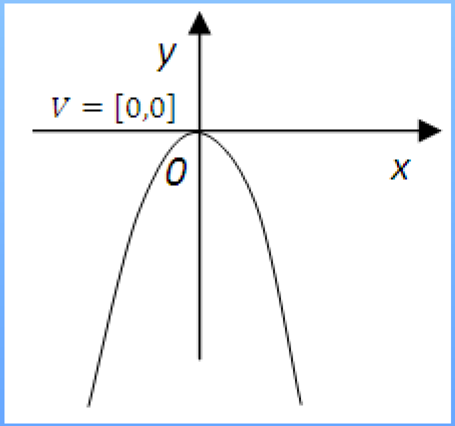
Pokud:

a) $y = a.x^2$, ($a \neq 0, b = 0, c = 0$)

***a* > 0**

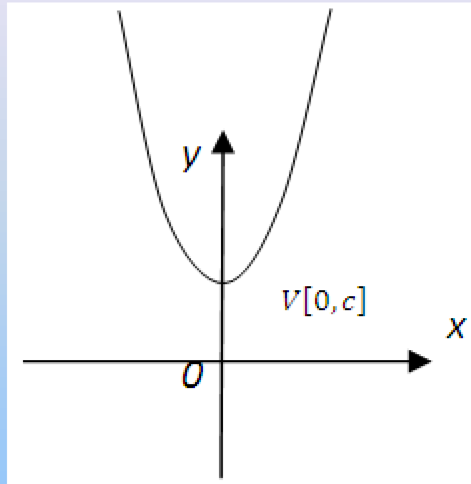


***a* < 0**

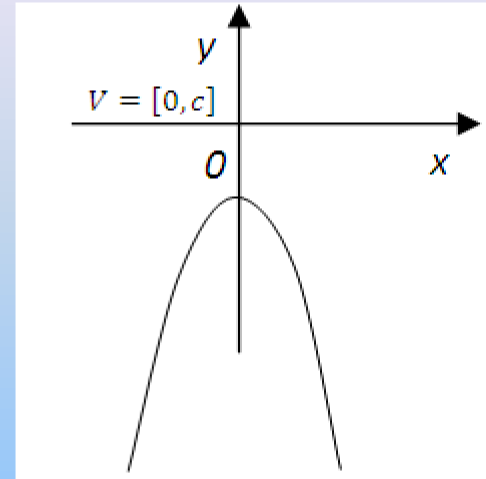


b) ***y = a.x*^2^ *+ c* ,** $(\, a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0\,)$

$a > 0$

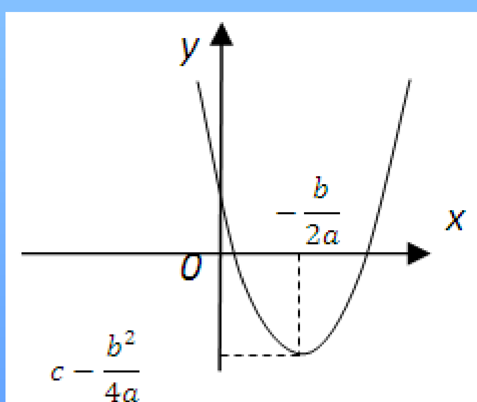


$a < 0$



c) ***y = a.x*^2^ *+b.x + c* ,** $(\, a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0\,)$

$a > 0$



$H(f) = \langle c - \frac{b^2}{4a}, +\infty)$

-je rostoucí v

$\langle -\frac{b}{2a}, +\infty)$

-je klesající v

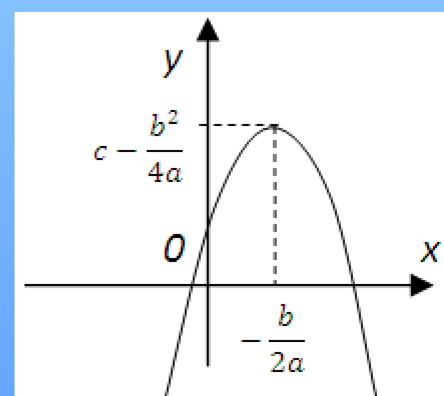
$(-\infty, -\frac{b}{2a}\rangle$

-Minimum v bodě

$x = -\frac{b}{2a}$

Je zdola omezená, není shora omezená.

$a < 0$



$H(f) = (-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\rangle$

- je rostoucí v

$(-\infty, -\frac{b}{2a}\rangle$

- je rostoucí v

$\langle -\frac{b}{2a}, +\infty)$

-Maximum v bodě

$x = -\frac{b}{2a}$

Je shora omezená, není zdola omezená.

- ***Nepřímá úměrnost* , *lineární lomená funkce***

  - jsou speciálním případem ***racionální funkce*** :

  > ***Racionální funkce*** - je každá funkce ve tvaru
  >
  > $$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0}$$
  >
  > kde x je proměnná, $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \dots a_1 , a_0 \in R , a_n \neq 0$
  >
  > $b_m , b_{m-1} , b_{m-2} , \dots b_1 , b_0 \in R , b_m \neq 0 , n, m \in N$
  >
  > ***D(f) = R \ nulové body polynomu Q_m (x)***

- ***Nepřímá úměrnost***

  - je každá funkce na množině $R \setminus \{ 0 \}$ daná ve tvaru:

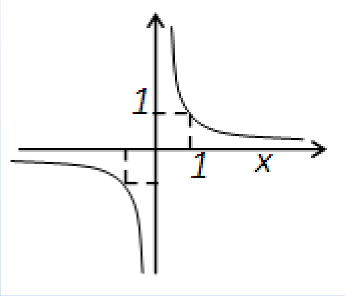
  $$y = \frac{k}{x}$$

  kde $k \in R \setminus \{ 0 \}$

  Grafem nepřímé úměrnosti je ***rovnoosá hyperbola***.

Funkce $y = \frac{k}{x}$

***k* > 0**



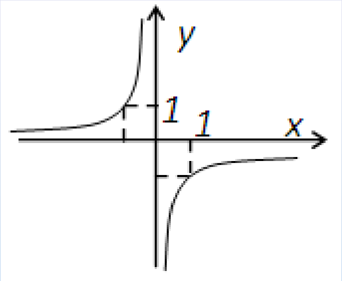
D (f) = R \ { *0* }

H (f) = R \ { *0* }

Funkce je lichá :

- *f* (*x*) = *f* (-*x*)

***k* < 0**



Je klesající v (- ∞; 0) ∪ (0; +∞) .

Je rostoucí v (- ∞; 0) ∪ (0; +∞)

Není shora omezená, ani zdola omezená. Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum.

- ***<u>Lineární lomená funkce</u>***
  - je každá funkce na množině *R* \ { -*d* / *c* } vyjádřená ve tvaru:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

kde $a, b, c, d \in R$, $c \neq 0$, $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$

- **Grafem** lineární lomené funkce je ***hyperbola***, kterou získáme z grafu funkce $y = \frac{k}{x}$ posunutím.

- ***Exponenciální funkce***

Exponenciální funkce o základu *a* je funkce na množině R vyjádřená ve tvaru

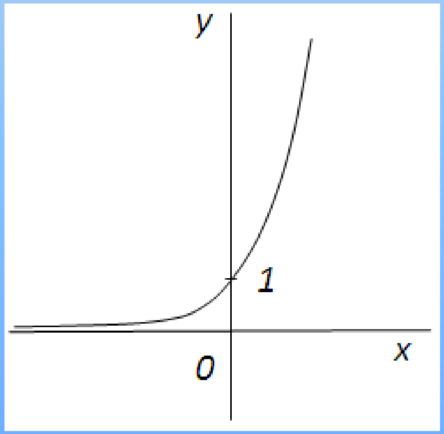
$$y = a^x$$

kde ***a*** je kladné číslo různé od 1 ($a > 0$, $a \neq 1$).

Graf exponenciální funkce se nazývá **exponenciální křivka (exponenciála)**.

- **Funkce** $y = a^x$, $a \in R^+ \setminus \{ 1 \}$

$a > 1$

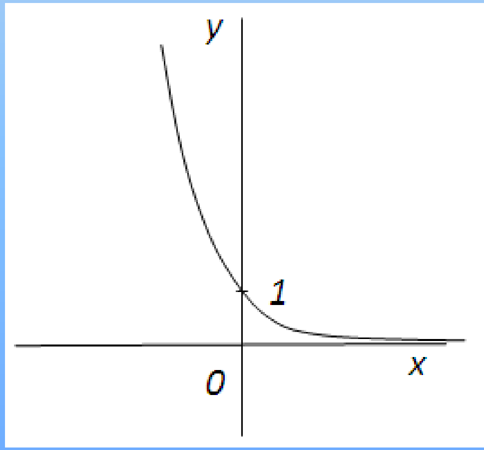


$D(f) = R$

$H(f) = (0 ;+\infty)$

Funkční hodnota v bodě 0 je rovna 1.

$0 < a < 1$



Funkce je rostoucí, tedy prostá.

Funkce je klesající, tedy prostá.

Je zdola omezená, není shora omezená.

Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum.

- ***Logaritmická funkce***

<u>Logaritmická funkce o základu *a*</u> je funkce, která je <u>inverzní</u> k exponenciální funkci $f\colon y = a^{x}$, kde ***a*** je kladné číslo různé od 1 ($a > 0$, $a \neq 1$).

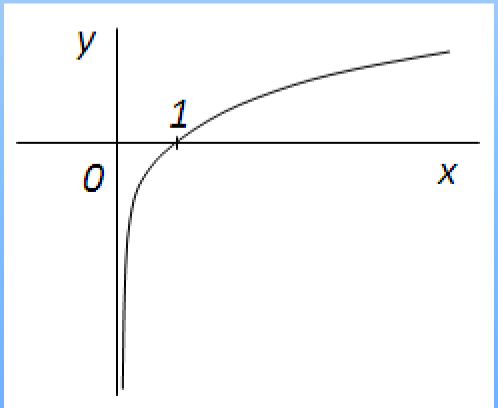
Tuto <u>inverzní funkci</u> píšeme $\boldsymbol{f^{-1} : y = \log_a x}$ a čteme :

„ logaritmus ***x*** o základu ***a*** „ .

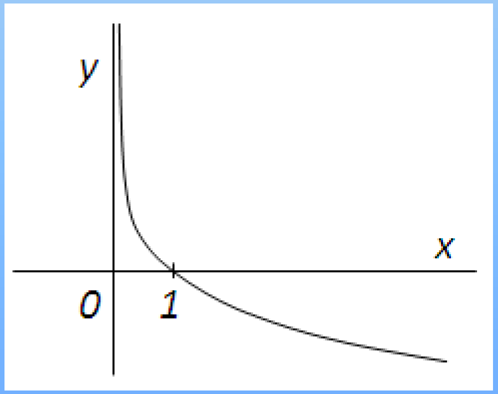
Graf logaritmické funkce se nazývá **logaritmická křivka** .

- **Funkce** $\boldsymbol{y = \log_a x}$, $a \in R^{+} \setminus \{ 1 \}$

$\boldsymbol{a > 1}$



$\boldsymbol{0 < a < 1}$



$D(f^{-1}) = (0 ;+\infty)$

$H(f^{-1}) = R$

Funkční hodnota v bodě 1 je rovna 0.

Funkce je rostoucí, tedy prostá.

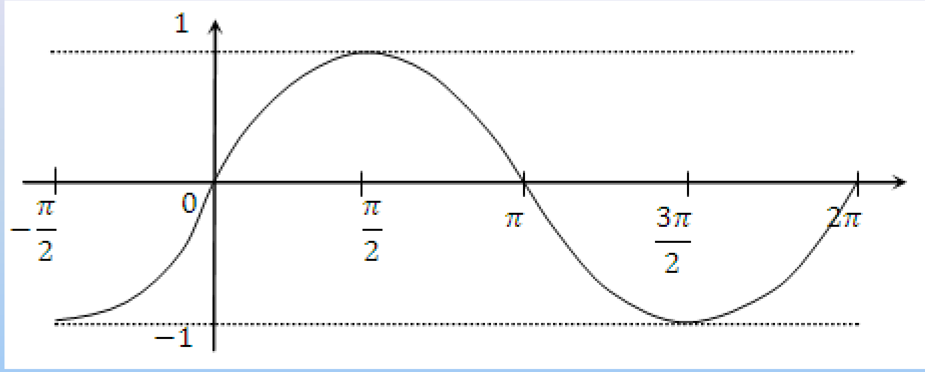
Funkce je klesající, tedy prostá.

Není ani zdola omezená, ani shora omezená.

Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum.

- ***Funkce sinus*** ***y* = sin *x*** :

  Graf funkce: **sinusoida**



D (f) = R

H (f) = ⟨ -1; 1⟩

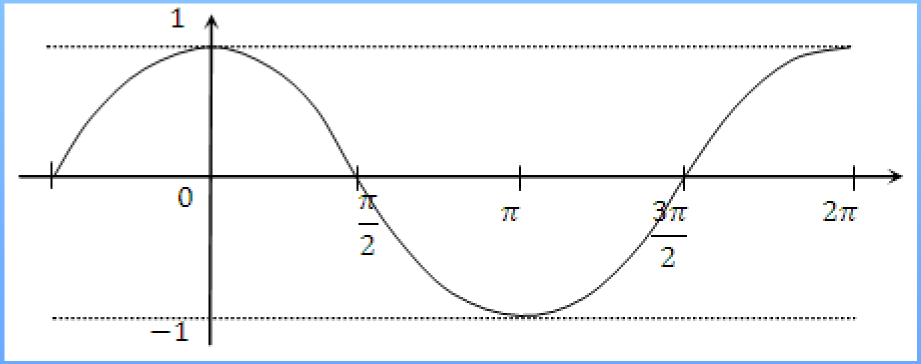
Lichá funkce : **- sin *x* = sin (-*x*)**

- je periodická s **periodou 2π** :

sin *x* = sin (*x* + 2 kπ) , k∈ Z

- ***Funkce kosinus*** ***y* = cos *x*** :

  Graf funkce: **cosinusoida**



D (f) = R

H (f) = ⟨ -1; 1⟩

Sudá funkce : **cos *x* = cos (-*x*)**

- je periodická s **periodou 2π** :

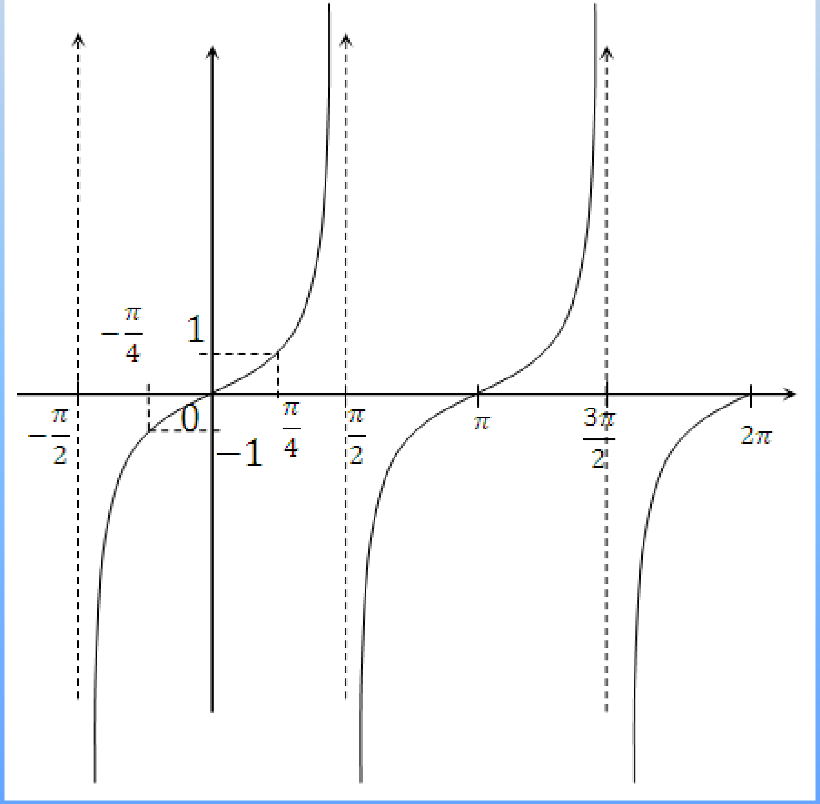
cos *x* = cos (*x* + 2 kπ) , k∈ Z

- ***<u>Funkce tangens</u>*:**

  pro libovolný úhel ***x*** platí:

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in Z$$

Graf funkce: **tangentoida**



- *definiční obor:*

$$D(f) = R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$$

- *obor hodnot:*

$$H(f) = R$$

- *lichá funkce :*

$$-\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}(-x)$$

- *je periodická* s **periodou** **π** :

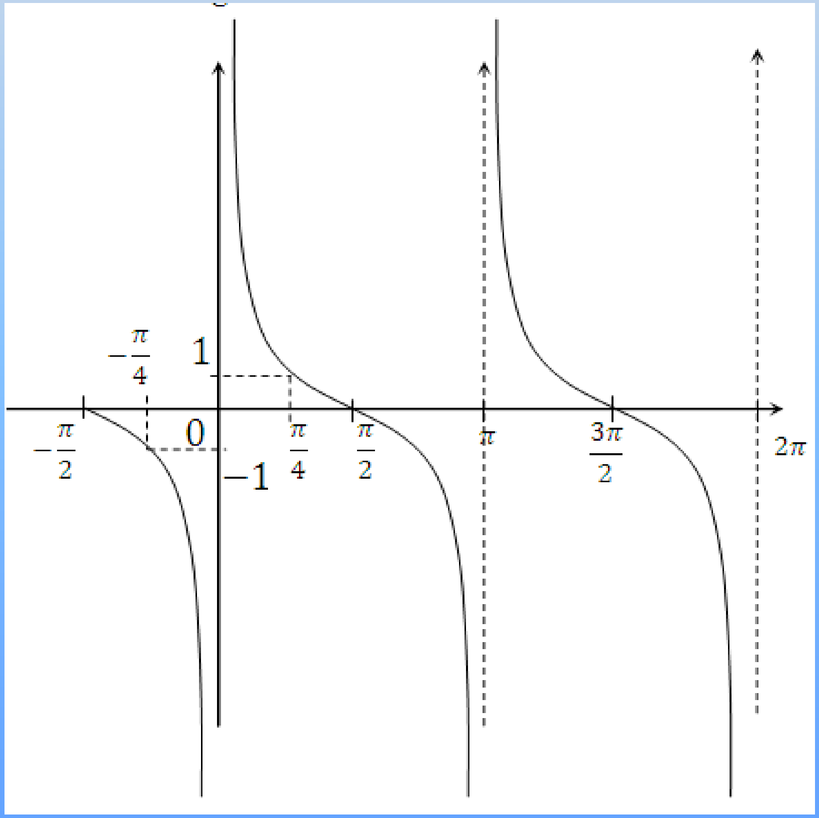
$$\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}(x + k\pi)$$

- ***Funkce kotangens*** **:**

Pro libovolný úhel ***x*** platí:

$$\mathrm{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \qquad x \neq k\pi\,, \quad k \in Z$$

Graf funkce**: kotangentoida**



- *definiční obor:*

$$D(f) = R \setminus \{k\pi, k \in Z\}$$

- *obor hodnot:*

$$H(f) = R$$

- *lichá funkce :*

$$-\mathrm{cotg}\,x = \mathrm{cotg}(-x)$$

- *je periodická* s **periodou** π :

$$\mathrm{cotg}\,x = \mathrm{cotg}(x + k\pi)$$

Referenční seznam:

- Odvárko, Oldřich. Matematika pro gymnázia – Funkce. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-164-2.
- Odvárko, Oldřich, Řepová, Jana, Skříček, Ladislav. Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU- 2.část. 5. vydání. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-85849-61-5.

Prezentaci vytvořila ***Mgr. Bc. Eva Vengřínová,*** vyučující předmětu matematika na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.

Prezentace je určena pro podporu výuky matematiky na středních odborných školách stavebních , oboru 78 - 42 - M/01 Technické lyceum.

Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Vytvořeno v rámci projektu OP VK "Nová cesta za vzděláním", registrační číslo CZ.1.07/1.5.00/34.0034,

za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky.