evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

3. Limita funkce

3.3. Užití limity funkce

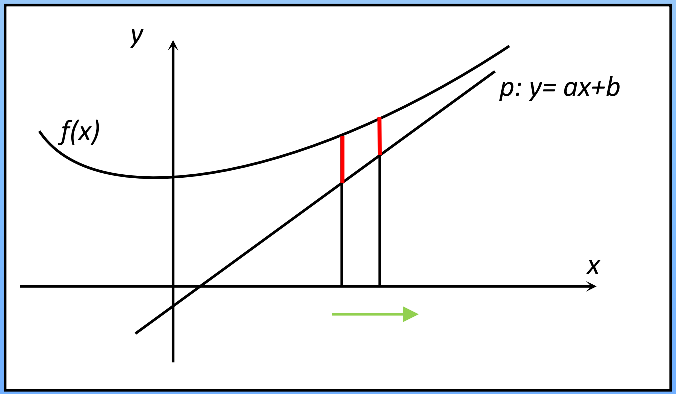
❖ <u>*Asymptoty grafu funkce*</u>

Existují dva druhy asymptot:

- <u>asymptoty se směrnicí</u> - mají vyjádření ve tvaru $y = a\,x + b$
- <u>asymptoty bez směrnice</u> - mají vyjádření ve tvaru , $x = c$

kde *c* je bod, v němž funkce *<u>není</u>* definována, ale je definována v jeho *<u>levém</u>* nebo *<u>pravém</u>* okolí.

1. *Asymptoty se směrnicí*



Přímku $y = a\,x + b$ nazveme **asymptotou se směrnicí grafu funkce** ***f*** **,** jestliže :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

potom

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

nebo

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \qquad a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$$

Př. Určete asymptoty se směrnicí grafu funkce $f: y = x + \frac{1}{x}$

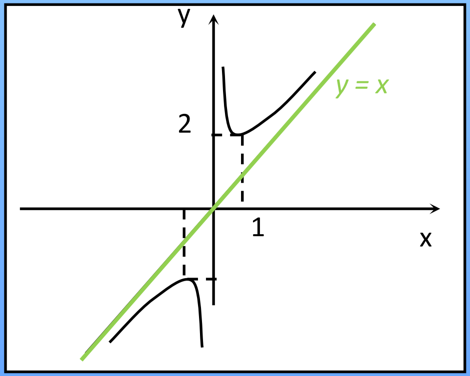
Hledáme rovnici přímky $y = a\,x + b$ kde

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \mathbf{1}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \mathbf{0}$$

Rovnice asymptoty je : *y* = ***1*** . *x* + ***0*** *,*
tzn. ***y = x***



2. *Asymptota bez směrnice*

Zjistíme-li, že :
-v <u>bodě nespojitosti</u> ***c*** existuje <u>aspoň jedna</u> **jednostranná nevlastní limita**, je přímka o rovnici $\boldsymbol{x = c}$ ***asymptotou bez směrnice funkce f***.

Př. Určete asymptoty bez směrnice grafu funkce $f: y = x + \frac{1}{x}$

Bod nespojitosti zjistíme z definičního oboru:

$D(f) = R \backslash \{0\}$ .... bod nespojitosti $\boldsymbol{c = 0}$

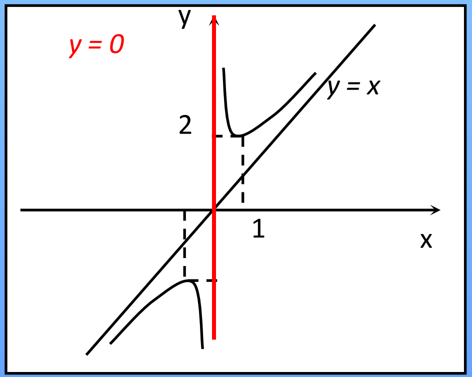
Jednostranné limity v bodě ***0*** :

$$\lim_{x \to 0+} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0-} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

V bodě 0 tedy existují nevlastní limity $\rightarrow$ funkce má <u>asymptotu bez směrnice</u>

$$\boldsymbol{x = 0}$$



Př. Určete asymptoty grafů funkcí:

a) $f: y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 3}$ $\qquad D(f) = R \setminus \{-3\}$

• *Asymptoty bez směrnice*:

- bod nespojitosti: $c = -3$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2 + 1}{x + 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2 + 1}{x + 3} = +\infty$$

V bodě *c = -3* leží *asymptota bez směrnice*:

$$\boldsymbol{x = -3}$$

• *Asymptoty se směrnicí*:

- Hledáme přímku : $y = a\,x + b$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x + 3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 3} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 3x}{x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 3}{1 + \frac{3}{x}} = -3$$

Asymptota se směrnicí má rovnici: $\boldsymbol{y = x - 3}$

b) $f: y = \dfrac{x}{2x-1} + x$ $\qquad D(f) = R \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

• ***Asymptoty bez směrnice***:

- bod nespojitosti: $c = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{x}{2x-1} + x = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{x}{2x-1} + x = +\infty$$

V bodě c leží *asymptota bez směrnice*:

$$x = \frac{1}{2}$$

• ***Asymptoty se směrnicí***:

- Hledáme přímku : $y = a\,x + b$

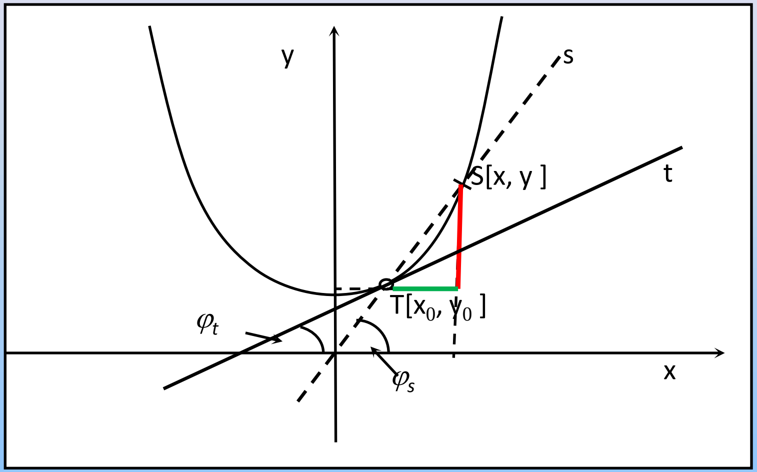
$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{2x-1} + x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2x^2 - x}{x.(2x-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2x-1} + x - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

Asymptota se směrnicí má rovnici: $y = x + \dfrac{1}{2}$

❖ ***Tečna grafu funkce***

-přímka mající s grafem jediný společný bod



Na grafu funkce zvolime dva body:

$T[x_0; y_0]$ $S[x\,; y]$

Těmito body vedeme sečnu ***s*** .

Označme směrnici sečny $\boldsymbol{k_s}$ **:**

$$k_s = tg\,\varphi_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Pokud se bude bod **S** přibližovat k bodu **T** , bude se i <u>sečna</u> **s** přibližovat k <u>tečně</u> **t**.*

Platí: $T \to S$ $\varphi_s \to \varphi_t$ $k_s \to k_t$

Tedy:
$$k_t = \lim_{x \to x_0} k_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

<u>*Rovnice **tečny***</u> v bodě $T[x_0; y_0]$ je : $y - y_0 = k_t\,.(x - x_0)$

<u>*Rovnice **normály***</u> v bodě $T[x_0; y_0]$ je : $y - y_0 = -\frac{1}{k_t}\,.(x - x_0)$

Označíme-li $\Delta\,x = x - x_0$ můžeme psát směrnici $k_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Př. Napište rovnici tečny grafu funkce:

a) $f: y = \frac{1}{x}$ v bodě $T\,[1;1]$

$$k_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{x.(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{x.(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{x} = -1$$

Rovnice tečny v bodě T[1; 1] je:

$$y - y_0 = k_t\,.(x - x_0)$$

$$y - 1 = -1\,.(x - 1)$$

$$y = 2 - x$$

b) $f: y = x^2$ v bodě $T\,[3;9]$

$$k_t = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3).(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 6$$

Rovnice tečny v bodě T[3; 9] je:

$$y - 9 = 6.\,(x - 3)$$

$$y - 9 = 6x - 18$$

$$y = 6x - 9)$$

Referenční seznam:

- Hrubý, Dag, Kubát, Josef.
  Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. 2. vydání.
  Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-210-6.

Prezentaci vytvořila ***Mgr. Bc. Eva Vengřínová,*** vyučující předmětu matematika na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.

Prezentace je určena pro podporu výuky matematiky na středních odborných školách stavebních , oboru 78 - 42 - M/01 Technické lyceum.

Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Vytvořeno v rámci projektu OP VK "Nová cesta za vzděláním", registrační číslo CZ.1.07/1.5.00/34.0034,

za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ