Výsledky

- ***Limita funkce v bodě***

Př.1. Vypočítejte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-1}{x^3+x+1} = \frac{3.2^2-1}{2^3+2+1} = \frac{12-1}{8+2+1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^5 - 5.\cos x\right) = 0^2 - 5.1 = -5$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\frac{1}{x^2} + \ln(x+2)\right) = \frac{1}{(-1)^2} + \ln(-1+2) = 1 + 0 = 1$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+6}\ +4}{1-x} = \frac{\sqrt{-2+6}\ +4}{1--2} = 2$

Př.2. Vypočítejte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x+3).(x-3)}{(x+1).(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-1).(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{x-1} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+5x-6}{x-x^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+6).(x-1)}{x.(1-x)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+6)}{-x} = -7$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-8x+15}{x^2-2x-15} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{(x-3).(x-5)}{(x+3).(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x-3}{x+3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

e) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x^2+1).(x+1)}{(x-3).(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2+1).(x-2)}{(x^2-1).(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)} = \frac{5}{3}$

Př.3. Vypočítejte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2.\sqrt{x+1}}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2.\sqrt{x+1}}{x^2-9} . \frac{\sqrt{x+13} + 2.\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13} + 2.\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x+13) - 4.(x+1)}{(x-3).(x+3).(\sqrt{x+13} + 2.\sqrt{x+1})} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x+13) - 4.(x+1)}{(x-3).(x+3).(\sqrt{x+13} + 2.\sqrt{x+1})} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{9-3x}{(x-3).(x+3).(\sqrt{x+13} + 2.\sqrt{x+1})} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-3.(x-3)}{(x-3).(x+3).(\sqrt{x+13} + 2.\sqrt{x+1})} =$

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{-3}{(x+3).(\sqrt{x+13} + 2.\sqrt{x+1})} = \frac{-3}{(3+3).(\sqrt{16} + 2.\sqrt{4})} = -\frac{3}{48} = -\frac{1}{16}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} . \frac{\sqrt{1+3x}+1}{\sqrt{1+3x}+1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x.(\sqrt{1+3x}+1)}{1+3x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x.(\sqrt{1+3x}+1)}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x}+1}{3} = \frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} . \frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-(1-x)}{x.(1+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x.(1+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-(1-x)}{x.(1+\sqrt{1-x})} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(3-x).(3+x)}{\sqrt{3x}-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{x}).(\sqrt{3}+\sqrt{x}).(3+x)}{\sqrt{3}.(\sqrt{x}-\sqrt{3})} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(-1).(\sqrt{3}+\sqrt{x}).(3+x)}{\sqrt{3}} = \frac{(-1).(2\sqrt{3}).(3+3)}{\sqrt{3}} = -12$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} . \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x.(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{x.(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{6+x} - \sqrt{6-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{6+x} - \sqrt{6-x}}{x} . \frac{\sqrt{6+x} + \sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x} + \sqrt{6-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(6+x) - (6-x)}{x.(\sqrt{6+x} + \sqrt{6-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{x.(\sqrt{6+x} + \sqrt{6-x})} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{6+x} + \sqrt{6-x}} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.

Př.4. Vypočítejte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 - 1^2}{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3 - 1^3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(x^{\frac{1}{6}}-1\right).\left(x^{\frac{1}{6}}+1\right)}{\left(x^{\frac{1}{6}}-1\right).\left(\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 + x^{\frac{1}{6}}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(x^{\frac{1}{6}}+1\right)}{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2 + x^{\frac{1}{6}}+1} = \frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}} \dfrac{6x^2-5x-6}{3x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}} \dfrac{6.\left(x-\frac{3}{2}\right).\left(x+\frac{2}{3}\right)}{3.(x-1).\left(x+\frac{2}{3}\right)} = \lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}} \dfrac{2.\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x-1)} = \dfrac{2.\left(-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{2}{3}-1\right)} = \frac{13}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{tgx}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2.\sin x.\cos x} = \lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1}{2.\cos^2 x} = \dfrac{1}{2.(-1)^2} = \frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}.\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2.(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\cos x} = 1^2.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{3}}{3.\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} x.cotg\, x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} \cos x}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin x-\sin x.\cos x}{\cos x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x.(1-\cos x)}{x^3.\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x.\ (1-\cos x).(1+\cos x)}{x^3.\cos x.\sin^2 x.(1+\cos x)} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x^3} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x.(1+\cos x)} = 1^3.1.\dfrac{1}{1.(1+1)} = \frac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+tg^2x}{x.\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x.\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2.\sin^2 x+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x.\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2.\sin^2 x.\cos^2 x+\sin^2 x}{x.\sin x.\cos^2 x} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x.(2\cos^2 x+1)}{x.\sin x.\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x.}.\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos^2 x+1}{\cos^2 x} = 1.\dfrac{2+1}{1} = 3$

- ***Jednostranné limity funkce v bodě***

Př.5. Vypočítejte jednostranné limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2} = -1$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1).(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} x+1 = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1).(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} x+1 = 2$

e) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{2x+1}{x-5} = \infty$

f) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{2x+1}{x-5} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+3}{x} = \infty$

h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-5}{x^2} = -\infty$

ch) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{7}{(2-x)^3} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x+2).(x-1)+3}{(x-1)^2} = \infty$

j) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{5x}{1-x^2} = -\infty$

k) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2+6}{x^2-9} = -\infty$

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.