evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

3. Limita funkce

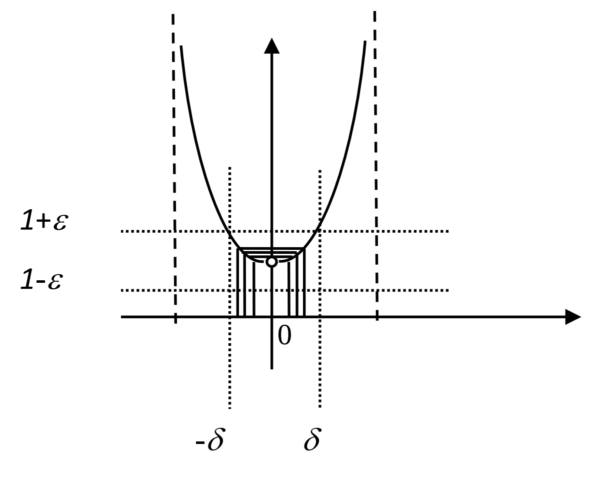
3.1. Limita funkce v bodě

- ***<u>Limita funkce v bodě</u>***

  Pojem limita patří k <u>nejzákladnějším matematickým pojmům</u>. Pomocí limity je možné přesně chápat řadu dalších pojmů: např. tečna grafu, asymptota grafu apod.

Pro lepší pochopení pojmu „limita funkce“ využijeme funkci

$f: y = \frac{tg\, x}{x}$ kde $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$



Funkce není definována v bodě 0.

Pro čísla ***velmi blízká*** k bodu **0** jsou funkční hodnoty ***velmi blízko*** k číslu **1**.

(Ke každému **ε-okolí bodu 1**

existuje takové **δ-okolí bodu 0**

že pro: všechna $x \in U(0,\delta) \setminus \{0\}$

je $f(x) \in U(1,\varepsilon)$)

Říkáme, že funkce $f: y = \frac{tg\, x}{x}$ má v bodě 0 limitu L = 1 , píšeme: $\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1$

- **Definice**

Funkce ***f*** má **v bodě *a* limitu *L***, jestliže k libovolně zvolenému okolí dobu *L* existuje okolí bodu *a* tak, že pro všechna reálná $x \neq a$ z tohoto okolí náleží hodnoty *f(x)* zvolenému okolí bodu *L*.

Zapisujeme: $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

- Funkce *f* má v bodě *a* **nejvýše** jednu limitu.

- **POZOR**: Funkce *f* je spojitá v bodě *a* , právě když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Př. Vypočtěte:

a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3)$ Funkce je spojitá v bodě 2 ,proto: $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{3x+4}{x^2+1}$ Funkce je spojitá v bodě 2 ,proto:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+4}{x^2+1} = \frac{3.2+4}{2^2+1} = \frac{10}{5} = 2$$

POZOR! Pokud počítáme limitu v bodě, v němž **není funkce definována**, použijeme následující větu:

Věta o limitě dvou funkcí.

Jestliže pro všechna $x \neq a$ z jistého <u>*okolí bodu a*</u> platí:

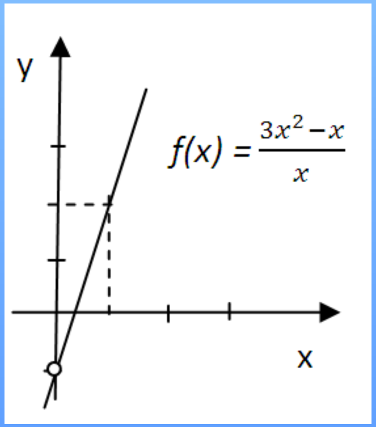
f(x) = g(x) a současně $\lim_{x\to a} g(x) = L$,

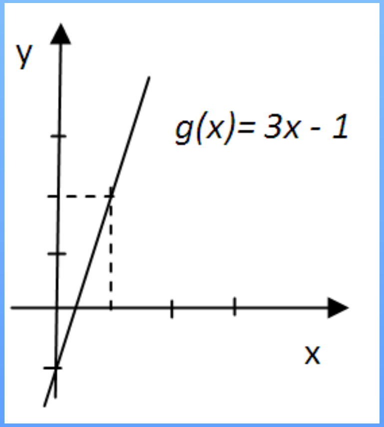
potom má <u>*v bodě a*</u> **limitu** i funkce ***f*** a platí: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$

Př. Vypočtěte:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - x}{x}$ Funkce není spojitá v bodě 0 , proto upravíme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x.(3x-1)}{x} = \lim_{x\to 0} (3x-1) = -1$$





Př. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1).(x+3)}{(x+1).(x^2-x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+3)}{(x^2-\ x+1)} = \dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+2x-5x-6}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+1).(x-2).(x+3)}{(x+1).(x-2)} = 5$

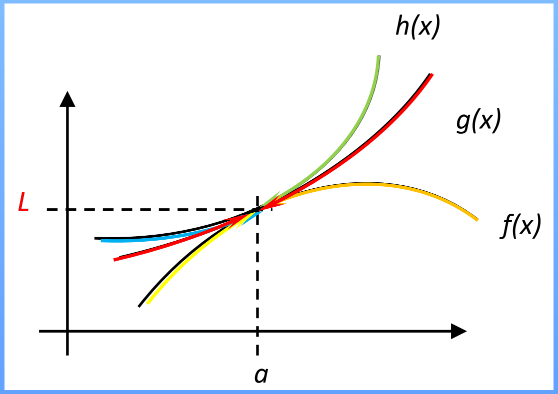
Možnosti počítání limit rozšíří následující věta:

Věta o třech limitách.

Jestliže pro všechna $x \neq a$ z jistého *okolí bodu a* platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$

a současně $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$,

potom existuje také **limita funkce *g* v bodě *a*** a platí : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$



Pro $x \to a$ je $f(x) \le g(x) \le h(x)$

$f(x) \to L, \quad h(x) \to L$

Potom také platí: $g(x) \to L$

S využitím věty o třech limitách určíme (bez důkazu): $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Na základě znalosti předchozí věty lze dokázat, že: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin k.x}{k.x} = 1$

Možnosti počítání limit rozšíří i následující věta:

Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, potom platí:

$$(1)\ \lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B$$

$$(2)\ \lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = A - B$$

$$(3)\ \lim_{x\to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x) = A.B$$

$$(4)\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$$

…………………za předpokladu, že $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Poznámka: $\lim\limits_{x\to a} c.f(x) = c. \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Př. Vypočtěte limity funkcí:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2.\cos x.\sin x}{3.x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\cos x=\frac{2}{3}.1.1=\frac{2}{3}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{2.\ \cos^2 x\ .\ \sin x}{x}=2.\cos^2 0.1=2.1.1=2$$

c) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^2+2}-\frac{x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x^2+2}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\frac{4}{0^2+2}-1=1$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{3.tg^2x}{2.x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3.\sin^2 x}{2x^2.\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2.\cos^2 x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=$$

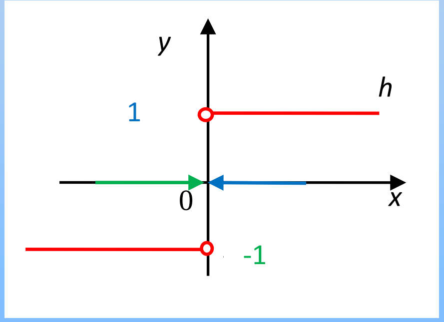
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2.\cos^2 x}.\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{3}{2.\cos^2 0}.1^2=\frac{3}{2}$$

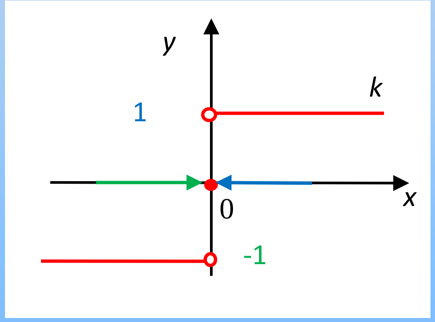
- ***<u>Jednostranné limity funkce v bodě</u>***

Podívejme se na grafy <u>dvou funkcí</u> a všimněme si, k <u>jaké hodnotě se blíží funkční hodnoty</u>, pokud se k bodu ***a* = 0** blížíme **zleva**, resp. **zprava**):

$$h\colon y = \frac{|x|}{x}$$

$$k\colon y = sgn\ x$$





Pokud se k bodu ***a* = 0** blížíme **zleva**, blíží se funkční hodnoty k **-1**.

Pokud se k bodu ***a* = 0** blížíme **zprava**, blíží se funkční hodnoty k **1** .

- ***Definice***

Funkce f **má v bodě** *a* **limitu** *L* **zleva**, jestliže ke každému ε **- okolí bodu** *L* existuje levé δ **- okolí bodu** *a* tak, že pro všechna reálná $x \neq a$ z levého δ**-okolí bodu** *a* patří funkční hodnoty *f(x)* do ε **- okolí bodu** *L* .

Zapisujeme:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L$$

Čteme: „Limita funkce ***f*** pro <u>***x*** blížící se k ***a*** zleva</u> je rovna L“.

- ***Definice***

Funkce f **má v bodě** *a* **limitu** *L* **zprava**, jestliže ke každému ε **- okolí bodu** *L* existuje pravé δ **- okolí bodu** *a* tak, že pro všechna reálná $x \neq a$ z pravého δ**-okolí bodu** *a* patří funkční hodnoty *f(x)* do ε **- okolí bodu** *L* .

Zapisujeme:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

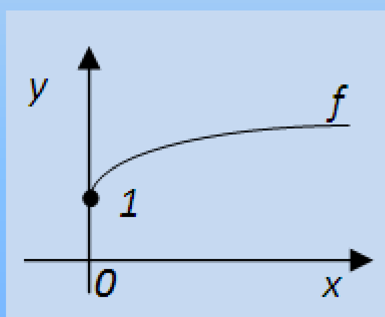
Čteme: „Limita funkce ***f*** pro <u>***x*** blížící se k ***a*** zprava</u> je rovna L“.

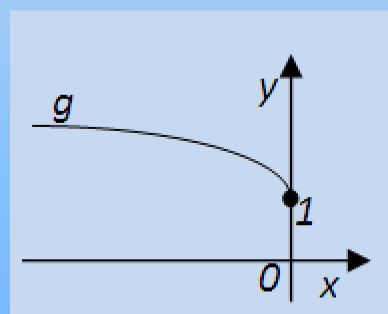
Souvislost mezi jednostrannou limitou funkce v bodě a limitou funkce v bodě uvádí následující věta:

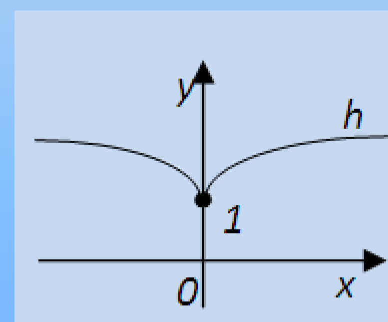
Limita funkce *f* v bodě ***a*** existuje, právě když existují v bodě ***a* limity zprava** a **zleva** a jsou si **rovny**.
Potom

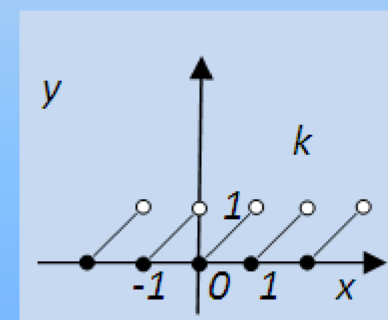
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$

Př. Odhadněte z obrázků limity v bodě **0 zleva**, v bodě **0 zprava**, v bodě **0 .**









$f: y = 1 + \sqrt{x}$

$\lim_{x\to 0+}\left(1+\sqrt{x}\right) = 1$

$g: y = 1 + \sqrt{-x}$

$\lim_{x\to 0-}\left(1+\sqrt{-x}\right) = 1$

$h: y = 1 + \sqrt{|x|}$

$\lim_{x\to 0-}\left(1+\sqrt{|x|}\right) = 1$

$\lim_{x\to 0+}\left(1+\sqrt{|x|}\right) = 1$

$\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{|x|}\right) = 1$

$k: y = (x - [x])$

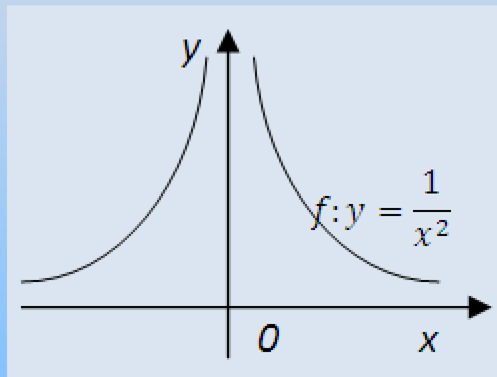
$\lim_{x\to 0-}(x-[x]) = 1$

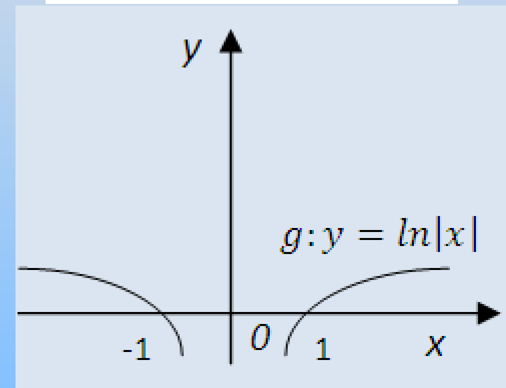
$\lim_{x\to 0+}(x-[x]) = 0$

- ***<u>Nevlastní limity funkce v bodě</u>***

Jdou-li <u>funkční hodnoty</u> pro ***x→ a*** , resp. ***x→ a-*** nebo ***x→ a+*** k **+∞, ** resp. **-∞** , pak říkáme, že funkce má v bodě *a* **nevlastní limitu** a píšeme

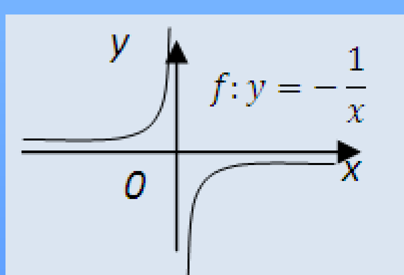
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$





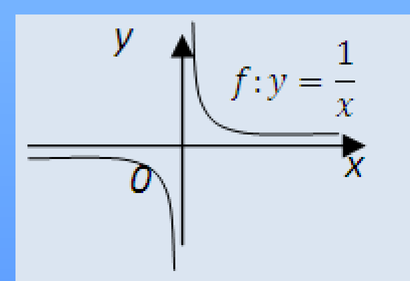
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} ln|x| = -\infty$$

Jednostranné nevlastní limity:



$$\lim_{x\to 0-} -\frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0+} -\frac{1}{x} = -\infty$$



$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Referenční seznam:

- Hrubý, Dag, Kubát, Josef.
  Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. 2. vydání.
  Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-210-6.

Prezentaci vytvořila ***Mgr. Bc. Eva Vengřínová,*** vyučující předmětu matematika na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.

Prezentace je určena pro podporu výuky matematiky na středních odborných školách stavebních , oboru 78 - 42 - M/01 Technické lyceum.

Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Vytvořeno v rámci projektu OP VK "Nová cesta za vzděláním", registrační číslo CZ.1.07/1.5.00/34.0034,

za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ