evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

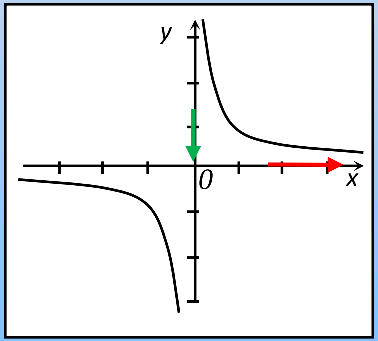
3. Limita funkce

3.2. Limita funkce v nevlastním bodě

- ***<u>Limita funkce v nevlastním bodě</u>***

Ukážeme, že je možné definovat limitu funkce i pro $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

Uvažujme funkci $f: y = \frac{1}{x}, D(f) = R \setminus \{0\}, H(f) = R \setminus \{0\}$



Když ***x*** **roste** nade všechny meze ($x \to +\infty$), jsou odpovídající funkční hodnoty ***f(x)*** stále menší a ***blíží se k nule*** ($f(x) \to 0$)

Říkáme, že funkce $f: y = \frac{1}{x}$ má v **nevlastním bodě** $+\infty$ limitu 0, a píšeme:

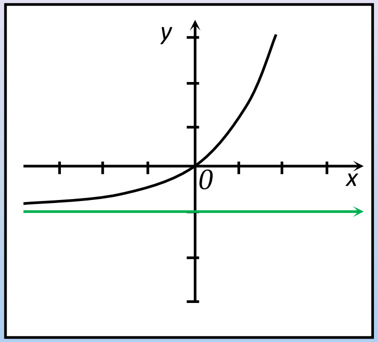
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Podobně: funkce $f: y = \frac{1}{x}$ má v **nevlastním bodě** $-\infty$ limitu 0, a píšeme:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Př. Určete nevlastní limity:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x - 1$

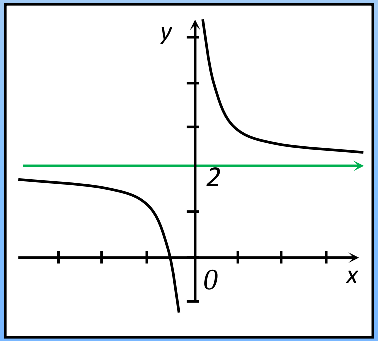


Funkce $f: y = 2^x - 1$ má
v **nevlastním bodě -∞** limitu -1,
a píšeme:

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x - 1 = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 2$



Funkce $f: y = \frac{1}{x} + 2$ má :

- v **nevlastním bodě - ∞** limitu 2,
a píšeme:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + 2 = 2$$

- v **nevlastním bodě + ∞** limitu 2,
a píšeme:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 2 = 2$$

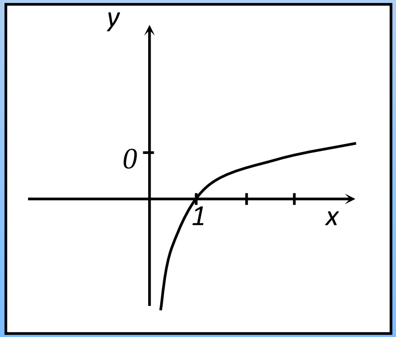
- ***Nevlastní limita funkce v nevlastním bodě***

Může nastat případ, kdy :

- ***x roste*** nebo ***klesá*** nade všechny meze ($x \to +\infty$, $x \to -\infty$), a také
- funkční hodnoty ***f(x)*** se blíží k $+\infty$ nebo k $-\infty$ ($f(x) \to +\infty$, $f(x) \to -\infty$).

Uvažujme funkci :

a) $f: y = \ln x \ , D(f) = (0;\ \infty) \ , H(f) = R$

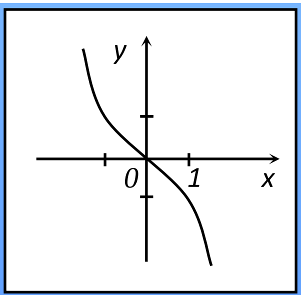


Funkce $f: y = \ln x$ má :

• v **nevlastním bodě + ∞** nevlastní limitu **+** ∞,

a píšeme: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

b) $g: y = -x^3 \ , D(f) = R \ , H(f) = R$

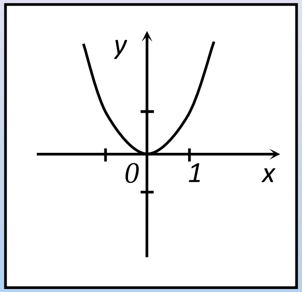


Funkce $g: y = -x^3$ má :

•v **nevlastním bodě + ∞** nevlastní limitu **- ∞** : $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$

•v **nevlastním bodě - ∞** nevlastní limitu **+ ∞** : $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$

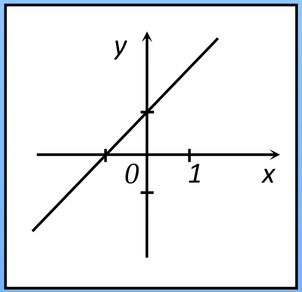
c) $h: y = x^2, D(f) = R, H(f) = (0, +\infty)$



Funkce $h: y = x^2$ má :

- v **nevlastním bodě + ∞** nevlastní limitu **+∞** : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- v **nevlastním bodě - ∞** nevlastní limitu **+∞** : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

d) $ch: y = x + 2, D(f) = R, H(f) = R$



Funkce $ch: y = x + 2$ má :

- v **nevlastním bodě + ∞** nevlastní limitu **+ ∞** : $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 = +\infty$
- v **nevlastním bodě - ∞** nevlastní limitu **+ ∞** : $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 2 = -\infty$

Př. Určete body, ve kterých <u>není</u> definována funkce $f: y = \frac{1}{x^2-4}$ a vypočítejte:

- **jednostranné limity** v těchto bodech a
- **limity v nevlastních bodech**.

- **Jednostranné limity :**

- Hledáme body, v nichž není funkce definována: $D(f) = R \setminus \{-2; 2\}$

♥ Určíme <u>jednostranné limity v bodě **- 2**</u>:

- *limita **zleva :*** $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1}{x^2-4}$ Pokud $x \to -2^-$, pak $x^2 - 4 \to 0^+$.

Dělíme-li číslo 1 velmi malým *kladným* číslem, dostáváme ***velké kladné číslo***:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$$

- *limita **zprava:*** $$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$$

♥ Určíme <u>jednostranné limity v bodě **+ 2**</u>:

- *limita **zleva :*** $$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$$

- *limita **zprava:*** $$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$$

- ***Limity v nevlastních bodech***:

♥ Určíme limity v nevlastním bodě **-** ∞:

Pokud $\boldsymbol{x \to -\infty}$, pak $\boldsymbol{x^2 - 4 \to +\infty}$.

Dělíme-li číslo 1 velkým *kladným* číslem, dostáváme ***velmi malé kladné číslo***:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0$$

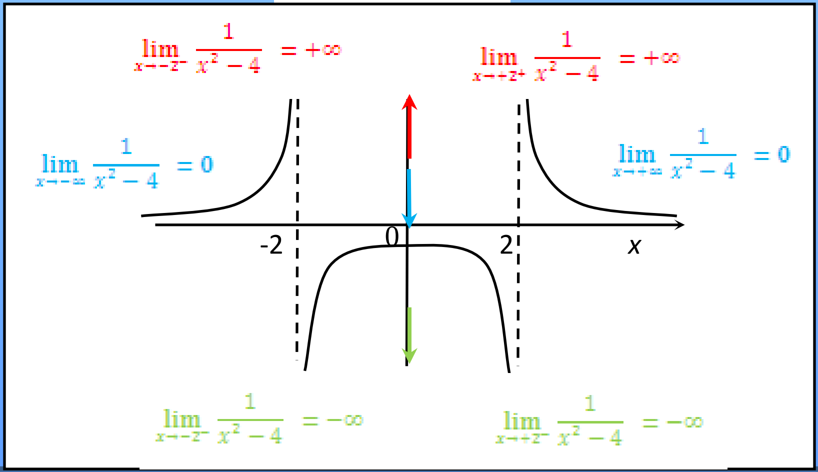
♥ Určíme limity v nevlastním bodě **+** ∞:

Pokud $\boldsymbol{x \to +\infty}$, pak $\boldsymbol{x^2 - 4 \to +\infty}$.

Dělíme-li číslo 1 velkým *kladným* číslem, dostáváme ***velmi malé kladné číslo***:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0$$

Graf funkce $f: y = \frac{1}{x^2-4}$



$$\lim_{x\to-2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty \qquad \lim_{x\to2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{1}{x^2-4} = -\infty \qquad \lim_{x\to2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0$$

- ***<u>Neurčité výrazy</u>***

Při výpočtu limit můžeme narazit na tzv. ***neurčité výrazy*** :

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\,.\,\infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}$$

Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkce platí :

- pro <u>vlastní</u> limity $\rightarrow$ bez omezení !!!

- pro <u>nevlastní</u> limity $\rightarrow$ pokud výpočet vede k neurčitým výrazům, nelze ji použít !!!

Pro <u>nevlastní limity</u> platí následující věty :

(1) Jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, potom platí:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\,.\,g(x)] = +\infty$$

(2) Jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom platí:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\,.\,g(x)] = +\infty$$

(3) Jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, potom platí:

$$\lim_{x\to a}[\,f(x)\,.\,g(x)] = -\infty$$

(4) Jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ a k je konstanta , potom platí:

$$\lim_{x\to a} k\,.\,f(x) = +\infty \text{ , pro } \quad k > 0$$

$$\lim_{x\to a} k\,.\,f(x) = -\infty \text{ , pro } \quad k < 0$$

(5) Jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ a k je konstanta , potom platí:

$$\lim_{x\to a} k\,.\,f(x) = -\infty \text{ , pro } \quad k > 0$$

$$\lim_{x\to a} k\,.\,f(x) = +\infty \text{ , pro } \quad k < 0$$

Pokud po dosazení hodnoty ***a*** při výpočtu $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dostaneme neurčitý výraz, musíme zadání **upravit** tak, abychom tento neurčitý výraz odstranili.

Velmi často k tomu využijeme krácení.

Př. Vypočítejte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x+4}$ Po dosazení *x = - 4* dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ proto upravíme:

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{(x-4).(x+4)}{x+4} = \lim_{x\to -4} (x-4) = -4-4 = -8$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ Po dosazení *x = 1* dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ proto upravíme:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1).(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left(x^2+x+1\right) = 1+1+1 = 3$$

c) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x+3}$ Po dosazení *x = -3* dostaneme $\frac{0}{0}$ proto upravíme:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3).(x-1)}{x+3} = \lim_{x\to -3} (x-1) = -3-1 = -4$$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ Po dosazení *x = -2* dostaneme $\frac{0}{0}$ proto upravíme:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2).(x-1)}{(x+2).(x+3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-2-1}{-2+3} = -3$$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$ Po dosazení *x = - 3* dostaneme $\dfrac{0}{0}$ proto upravíme:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\ .\ (\sqrt{x+4}+1)}{(\sqrt{x+4}-1)\ .\ (\sqrt{x+4}+1)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\ .\ (\sqrt{x+4}+1)}{x+4-1} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \left(\sqrt{x+4}+1\right) = 2$$

f) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ Po dosazení *x = 7* dostaneme $\dfrac{0}{0}$ proto upravíme:

$$\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim_{x\to 7} \frac{(2-\sqrt{x-3}).(2+\sqrt{x-3})}{(x^2-49).(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x\to 7} \frac{4-(x-3)}{(x^2-49).(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x\to 7} \frac{-1}{(x+7).(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}$$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ Po dosazení *x = 0* dostaneme $\dfrac{0}{0}$ proto upravíme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x\ .\ (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)\ .\ (\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x\ .\ (\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x\ .\ 4.(\sqrt{x+1}+1)}{4x} = 8$$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ Po dosazení *x = 0* dostaneme $\dfrac{0}{0}$ proto upravíme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2$$

Mezi **důležité limity** v nevlastním bodě patří :

♥ $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} P_n(x)$

kde $P_n(x)$ je polynomická funkce stupně ***n :***

$$P_n = a_n \,.\, x^n + a_{n-1} \,.\, x^{n-1} + \cdots + a_1 \,.\, x^1 + a_0, \; a_n \neq 0, n \in N \cup \{0\}$$

Platí: $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n\, x^n$ $\lim\limits_{x \to -\infty} P_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n\, x^n$

Výsledek těchto limit závisí na a_n a n takto:

- je-li $\boldsymbol{a_n} > \mathbf{0}$, $n \in N$, potom
  $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty$
- je-li $\boldsymbol{a_n} < \mathbf{0}$, $n \in N$, potom
  $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n(x) = -\infty$
- je-li $\boldsymbol{a_n} > \mathbf{0}$, ***n*** ***liché***, nebo $\boldsymbol{a_n} < \mathbf{0}$, ***n*** ***sudé***
  $\lim\limits_{x \to -\infty} P_n(x) = -\infty$
- je-li $\boldsymbol{a_n} > \mathbf{0}$, ***n*** ***sudé***, nebo $\boldsymbol{a_n} < \mathbf{0}$, ***n*** ***liché***
  $\lim\limits_{x \to -\infty} P_n(x) = +\infty$

♥ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P_r(x)}{Q_s(x)}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{P_r(x)}{Q_s(x)}$

kde ***$P_r(x)$*** , ***$Q_s(x)$*** jsou polynomické funkce stupnů ***r , s***

Př. Vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^3-x^2+x+2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3(1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2\,x^3}) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3\,.\,1 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^3-x^2+x+2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3(1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2\,x^3}) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3\,.\,1 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4x^3-x^2+x+2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4x^3\right)(1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2\,x^3}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^3)\,.\,1 = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^3-x^2+x+2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^3\right)(1-\frac{1}{4x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2\,x^3}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3)\,.\,1 = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^4-2x^3-x+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4\,.\,1 = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^3-x+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4\,.\,1 = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^4-2x^3-x+1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^4\right).1 = -\infty$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^4-2x^3-x+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^4\right).1 = -\infty$

Př. Vypočítejte limity:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{x^2+x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{+\infty-1+0}{1+0-0}=+\infty$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-x+2}{3x^3+x^2+x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{4-0+0}{3+0+0-0}=\frac{4}{3}$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+5}{2x^3-x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}=\frac{0-0+0}{2-0+0}=0$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}-6}{3+\frac{1}{x}}=\frac{0-6}{3+0}=-2$$

- ***Některé důležité limity***

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ \text{neexistuje}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^n}=0\,,n\in N$$

- Je-li $a \in (0;1)$

$$\lim_{x\to -\infty}a^x=+\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}a^x=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}\log_a x=-\infty$$

- Je-li $a \in (1;+\infty)$

$$\lim_{x\to -\infty}a^x=0 \qquad \lim_{x\to +\infty}a^x=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}\log_a x=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\sin x\ \text{neexistuje} \qquad \lim_{x\to -\infty}\sin x\ \text{neexistuje} \qquad \lim_{x\to +\infty}\cos x\ \text{neexistuje} \qquad \lim_{x\to -\infty}\cos x\ \text{neexistuje}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}tgx=+\infty \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}tgx=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}cotgx=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}cotgx=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Referenční seznam:

- Hrubý, Dag, Kubát, Josef.
  Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. 2. vydání.
  Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-210-6.

Prezentaci vytvořila ***Mgr. Bc. Eva Vengřínová,*** vyučující předmětu matematika na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.

Prezentace je určena pro podporu výuky matematiky na středních odborných školách stavebních , oboru 78 - 42 - M/01 Technické lyceum.

Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Vytvořeno v rámci projektu OP VK "Nová cesta za vzděláním", registrační číslo CZ.1.07/1.5.00/34.0034,

za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ