Přehled vzorců

- ***Asymptoty grafu funkce :***

Přímku $p: y = ax + b$ nazveme ***asymptotou se směrnicí*** **grafu funkce** *f* , jestliže

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

kde $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax]$ nebo $a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax]$

Asymptoty bez směrnice

Zjistíme-li, že v bodě nespojitosti c existuje aspoň jedna **jednostranná nevlastní limita**, je přímka o rovnici $x = c$ asymptotou bez směrnice funkce *f*.

- ***Tečna grafu funkce***

Rovnice tečny grafu funkce *f* v bodě T[x_0 , y_0] je : $y - y_0 = k_t \, . (x - x_0)$

kde: $k_t = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- ***Normála grafu funkce***

Rovnice normály grafu funkce *f* v bodě T[x_0 , y_0] je : $y - y_0 = -\frac{1}{k_t} \, . (x - x_0)$

- ***Derivace funkce v bodě***

Mějme funkci f definovanou v jistém okolí bodu x_0.

Existuje-li limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

nazýváme ji **derivací funkce v bodě** x_0 .

Značíme ji symbolem $f'_{(x_0)}$

Derivace v bodě = směrnice tečny grafu funkce v bodě.

Pak rovnice tečny v bodě T[x_0 , y_0] je : $y - y_0 = f'_{(x_0)} \, . (x - x_0)$

- ***Derivace elementárních funkcí***

1. Pro funkci $f : y = c \, , c \in R,$ platí $y' = 0$

2. Pro funkci $f : y = x^n \, , \; x \in R, \; n \in N,$ platí $y' = n \, . x^{n-1}$

3. Pro funkci $f : y = \sin x \, , \; x \in R,$ platí $y' = \cos x$

4. Pro funkci $f : y = \cos x \, , \; x \in R,$ platí $y' = -\sin x$

5. Pro funkci $f : y = tg\, x \, , \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \, , \; k \in Z,$ platí $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

6. Pro funkci $f : y = cotg\, x \, , \; x \neq k\pi \, , \; k \in Z$ platí $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

7. Pro funkci $f : y = x^n \, , \; x \in R - \{0\}, \; n \in Z^-,$ platí $y' = n \, . x^{n-1}$

8. Pro funkci $f : y = e^x \, , \; x \in R,$ platí $y' = e^x$

9. Pro funkci $f : y = a^x \, , \; x \in R \, , a \in R^+ - \{1\}$ platí $y' = a^x \, . \ln a$

10. Pro funkci $f : y = \ln x \, , \; x \in R^+,$ platí $y' = \frac{1}{x}$

11. Pro funkci $f : y = \log_a x \, , \; x \in R^+, \; a \in R^+ - \{1\}$ platí $y' = \frac{1}{x \, . \ln a}$

12. Pro funkci $f : y = x^n \, , \; x \in R^+, \; n \in R,$ platí $y' = n \, . x^{n-1}$

- ***Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí***

Jestliže funkce $\boldsymbol{u}$ **,** $\boldsymbol{v}$ mají v bodě $\boldsymbol{x_0}$ derivaci, má v bodě $\boldsymbol{x_0}$ derivaci i **součet, rozdíl, součin** a pro $v(x_0) \neq 0$ i **podíl** funkcí $\boldsymbol{u}$ **,**$\boldsymbol{v}$ a platí:

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

$$(u-v)'(x_0) = u'(x_0) - v'(x_0)$$

$$(u.v)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

- ***Derivace složené funkce***

Jestliže funkce $\boldsymbol{z = g(x)}$ má derivaci v bodě $\boldsymbol{x_0}$ a jestliže funkce $\boldsymbol{y = f(z)}$ má derivaci v bodě $\boldsymbol{z_0 = g(x_0)}$, má složená funkce $\boldsymbol{y = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)}$ derivaci v bodě $\boldsymbol{x_0}$ a platí:

$$\boldsymbol{y = (f \circ g)'(x) = f'\big(g(x_0)\big) \,.\, g'(x_0)}$$

- ***L´Hospitalovo pravidlo 1.***

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **.**
Potom existuje také $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- ***L´Hospitalovo pravidlo 2.***

Nechť $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **.**
Potom existuje také $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

- ***Monotónnost funkce a derivace***

Funkce monotónní = funkce rostoucí nebo klesající.
Má-li funkce $\boldsymbol{f}$ v každém bodě intervalu ***(a,b)*** <u>kladnou</u> 1.derivaci, je v tomto intervalu <u>rostoucí</u>.
Má-li funkce $\boldsymbol{f}$ v každém bodě intervalu ***(a,b)*** <u>zápornou</u> 1.derivaci, je v tomto intervalu <u>klesající</u>.

- ***Stacionární body***

Má-li funkce $y = f(x)$ v bodě $\boldsymbol{x_0}$ derivaci a je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod $\boldsymbol{x_0}$ nazýváme <u>nulovým bodem 1.derivace</u> nebo také **stacionárním bodem** funkce ***f***.

- ***Extrémy funkce a 2.derivace***

Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť existuje v bodě x_0 druhá derivace.
Je-li $\boldsymbol{f''(x_0)} < 0$, má funkce f v bodě x_0 **ostré lokální maximum**.
Je-li $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$, má funkce f v bodě x_0 **ostré lokální minimum**.

- ***Konvexnost a konkávnost funkce***

Je-li $\boldsymbol{f''(x_0)} > 0$, pak je funkce f v bodě x_0 **konvexní**.
Je-li $\boldsymbol{f''(x_0)} < 0$, pak je funkce f v bodě x_0 **konkávní**.