evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

4. Derivace funkce

4.3. Průběh funkce

Pro přesné určení průběhu grafu funkce je třeba určit bližší vlastnosti funkce.

- **Monotónnost funkce**

Funkce monotónní = funkce rostoucí nebo klesající.

Monotónnost funkce lze zjistit pomocí 1. derivace funkce .

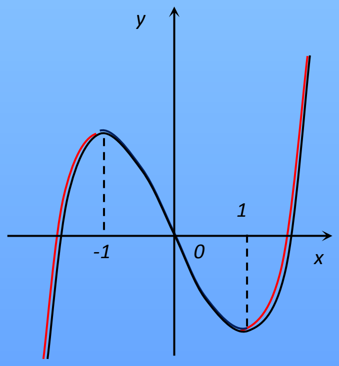
Má-li funkce ***f*** v každém bodě intervalu ***(a,b)*** kladnou 1.derivaci $\boldsymbol{f'(x) > 0}$, je v tomto intervalu rostoucí.

Má-li funkce ***f*** v každém bodě intervalu ***(a,b)*** zápornou 1.derivaci $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ je v tomto intervalu klesající.

Př. Určete intervaly monotónnosti funkce ***f***: $y = x^3 - 3x$

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$y' > 0 \qquad\qquad y' < 0$$
$$3x^2 - 3 > 0 \qquad\qquad 3x^2 - 3 < 0$$
$$x^2 > 1 \qquad\qquad x^2 < 1$$
$$|x| > 1 \qquad\qquad |x| < 1$$



Funkce je **rostoucí** v intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$a **klesající** v intervalu $(-1, 1)$.

Př. Určete intervaly monotónnosti funkce $\boldsymbol{f}: y = x^3 - 12\,x$

$y' = 3x^2 - 12$

$y' > 0$	$y' < 0$
$3x^2 - 12 > 0$	$3x^2 - 12 < 0$
$x^2 > 4$	$x^2 < 4$
$\lvert x\rvert > 2$	$\lvert x\rvert < 2$

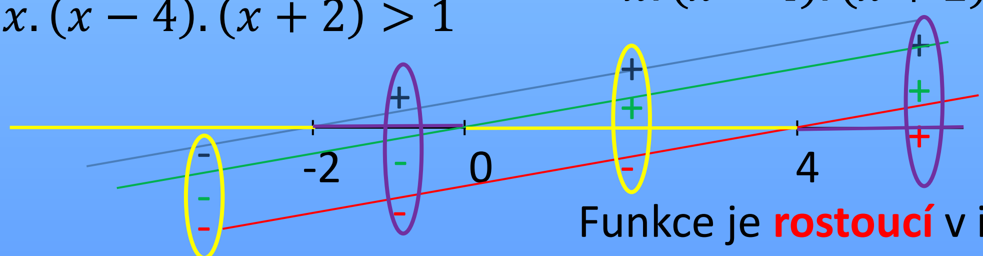
Funkce je **rostoucí** v intervalech $(-\infty, -2)$ a $(2, +\infty)$ a **klesající** v intervalu $(-2, 2)$.

Pozn.: Vzhledem ke spojitosti funkce $\boldsymbol{f}: y = x^3 - 12\,x$ *je tato funkce rostoucí i v intervalech* $(-\infty, -2\rangle$ a $\langle 2, +\infty)$ *a klesající v intervalu* $\langle -2, 2\rangle$.

Př. Určete intervaly monotónnosti funkce $\boldsymbol{f}: y = 3x^4 - 8\,x^3 - 48\,x^2$

$y' = 12x^3 - 24x^2 - 96x$

$y' > 0$	$y' < 0$
$12\text{x}.\,(x^2 - 2x - 8) > 0$	
$x.\,(x-4).\,(x+2) > 1$	$x.\,(x-4).\,(x+2) < 1$

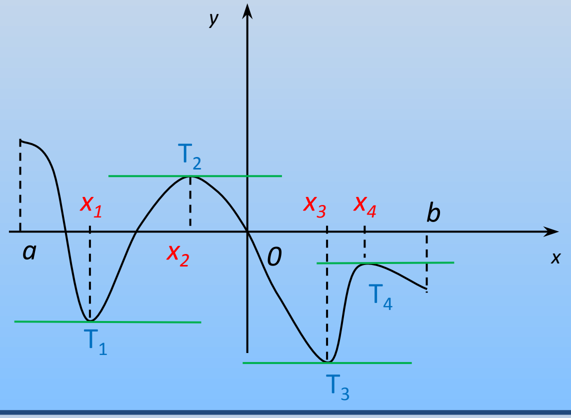


Funkce je **rostoucí** v intervalech $(-2, 0)$ a $(4, +\infty)$ a **klesající** v intervalech $(-\infty, -2)$ a $(0, 4)$.

- **Extrémy funkce**

Extrémy funkce = maximum (největší hodnota funkce) nebo minimum (nejmenší hodnota funkce) na dané množině.

Extrémy funkce lze zjistit pomocí 1. derivace funkce .



Funkce je definována v intervalu $\langle a, b\rangle$:
- v bodech $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_4}$ nabývá funkce **lokální** („místní“) **extrémy** .

V bodech T_1, T_2, T_3, T_4 jsou tečny rovnoběžné s osou x , tzn. mají směrnici tečny $\boldsymbol{k_T = 0}$

Má-li funkce ***f*** v bodě $\boldsymbol{x_0}$ **lokální extrém** a existuje-li v tomto bodě derivace $\boldsymbol{f'(x_0)}$, pak platí: $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$

Absolutní extrémy (**globální maximum** nebo **minimum**) funkce definované v intervalu $\langle \boldsymbol{a, b}\rangle$ hledáme tak, že porovnáme funkční hodnoty v lokálních extrémech a funkční hodnoty ***f(a), f(b)*** a vybereme největší, resp. nejmenší .

- **Stacionární body**

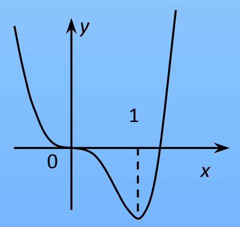
Má-li funkce $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{x_0}$ derivaci a je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod $\boldsymbol{x_0}$ nazýváme <u>nulovým bodem 1. derivace</u> nebo také **stacionárním bodem** funkce $\boldsymbol{f}$.

Stacionární body jsou řešením rovnice $f'(x_0) = 0$.
V těchto bodech funkce <u>může</u>, ale <u>nemusí</u> mít lokální extrém.

Př. Určete stacionární body funkce $\boldsymbol{f}: y = 3x^4 - 4x^3$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

$$f'(x_0) = 12\,x^3 - 12x^2 = 0$$

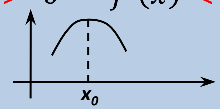
.....stacionární body $x_1 = 0\,, x_2 = 1$



– v bodě $x_2 = 1$ má funkce lokální minimum,
– v bodě $x_1 = 0$ nemá funkce lokální minimum.

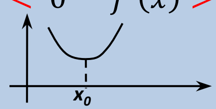
Podmínka pro existenci lokálního extrému :

$f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$



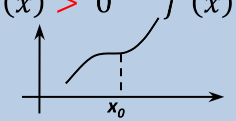
lokální maximum

$f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$

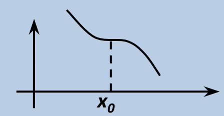


lokální minimum

$f'(x) > 0$ $f'(x) > 0$



$f'(x) < 0$ $f'(x) < 0$



není lokální minimum ani maximum

Př. Určete lokální extrémy funkce $\boldsymbol{f}: y = -x^2 + 2x + 3$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

$$f'(x_0) = -2x + 2 = 0$$

…..stacionární bod $\quad x_1 = 1$

$f'(x_0) > 0 \quad 1 \quad f'(x_0) < 0$

– v bodě $x = 1$
má funkce lokální maximum

Př. Určete stacionární body funkce $\boldsymbol{f}: y = 3x^2 - 2x^3$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

$$f'(x_0) = 6x - 6x^2$$

…..stacionární body $\quad x_1 = 0, x_2 = 1$

$f'(x_0) < 0 \quad 0 \quad f'(x_0) > 0 \quad 1 \quad f'(x_0) < 0$

– v bodě $x = 1$ má funkce lokální maximum
– v bodě $x = 0$ má funkce lokální minimum

- **Extrémy funkce a 2.derivace**

V předchozím článku jsme určovali lokální extrémy funkce pomocí znamének 1.derivace kolem stacionárních bodů.
Nyní si ukážeme, jak určit extrémy funkce pomocí 2.derivace.

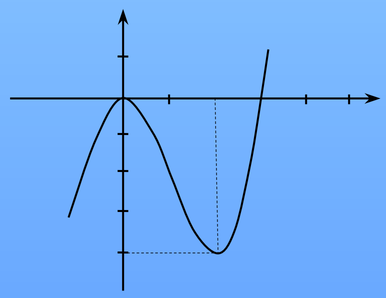
Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť existuje v bodě x_0 druhá derivace.
Je-li $\boldsymbol{f''(x_0) < 0}$, má funkce f v bodě x_0 **lokální maximum**.
Je-li $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$, má funkce f v bodě x_0 **lokální minimum**.

Pozn.: je-li $\boldsymbol{f''(x_0) = 0}$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout.

Př. Vyšetřete lokální extrémy funkce $\boldsymbol{f}: y = x^3 - 3x^2$

$y' = 3x^2 - 6x$ stacionární body: $3x^2 - 6x = 0$

$x_1 = 0 \,,\ x_2 = 2$



$y'' = 6x - 6$ pro bod $x_1 = 0$ dostáváme $y''(0) = -6 < 0$

…lokální maximum

pro bod $x_2 = 2$ dostáváme $y''(2) = 6 > 0$

…lokální minimum

Určení globálních extrémů funkce v intervalu, který není uzavřený .

Př. Vyšetřete globální extrémy funkce $\boldsymbol{f}: y = x^3 - 12x + 20$ v intervalu $\langle \mathbf{-5}; \mathbf{5})$

- stacionární body: $y' = 3x^2 - 12 = 3.(x^2 - 4) = 0$

  $x_1 = -2$, $x_2 = 2$
- lokální extrémy funkce: $y'' = 6x$

  pro bod $x_1 = -2$ dostáváme $y''(-2) = -12 < 0$

  …ostré lokální maximum, s hodnotou $f(-2) = \mathbf{36}$

  pro bod $x_2 = 2$ dostáváme $y''(2) = 12 > 0$

  …ostré lokální minimum, s hodnotou $f(2) = \mathbf{4}$
- vypočteme hodnoty v krajních bodech intervalu $f(a), f(b)$:

  $f(-5) = \mathbf{-45}$ …***globální minimum***

  $f(5) = \mathbf{85}$ … není globální maximum , protože $5 \notin D(f)$,

  tzn.funkce ***nemá*** globální maximum

Pozn.: Pokud řešíme funkci $\boldsymbol{f}: y = x^3 - 12x + 20$ v intervalu:

$a)\langle -5; 5\rangle$*…pak v bodě **x = -5** **je** globální minimum**,** v bodě **x = 5** **je** globální maximum*

$b)(-5; 5\rangle$*…pak funkce **nemá** globální minimum, v bodě **x = 5** **je** globální maximum*

$c)(-5; 5)$*…pak funkce **nemá** globální minimum, **nemá** globální maximum*

Př. Určete globální a lokální extrémy funkce $\boldsymbol{f}: y = x^3 - 3x + 20$ v intervalu $\langle \mathbf{-3}; \mathbf{3} \rangle$

- stacionární body: $y' = 3x^2 - 3 = 3.(x+1).(x-1) = 0$

  $x_1 = -1\,,\, x_2 = 1$
- lokální extrémy funkce: $y'' = 6x$

  pro bod $x_1 = -1$ dostáváme $y''(-1) = -6$ … lokální maximum, … $f(-1) = \mathbf{22}$

  pro bod $x_2 = 1$ dostáváme $y''(1) = 6$ …lokální minimum, … $f(1) = \mathbf{18}$
- vypočteme hodnoty v krajních bodech intervalu:

  $f(\mathbf{-3}) = \mathbf{2}$ …***globální minimum***

  $f(\mathbf{3}) = \mathbf{38}$ …***globální maximum***

Př. Určete hodnotu konstanty $a \in R$ tak, aby funkce $\boldsymbol{f}: y = a.\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ měla v bodě $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ lokální extrém. Určete druh extrému.

$$y' = a.\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x\,.\,3 = a.\cos x + \cos 3x$$

$$y'\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) = a.\cos\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} + \cos 3\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} = a.0{,}5 + (-1) = 0 \;\boldsymbol{\ldots}\; \boldsymbol{a} = \mathbf{2} \quad \boldsymbol{y' = 2.\cos x + \cos 3x}$$

$$y'' = 2.(-\sin x) + (-\sin 3x).3 = -2.\sin x - 3.\sin 3x$$

$$y''\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) = -2.\left(\sin\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) - 3.\left(\sin 3\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right) = -2.\frac{\sqrt{3}}{2} - 3.0 = -\sqrt{3}$$

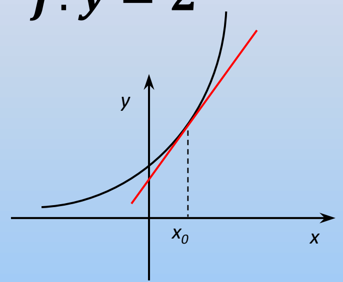
…lokální maximum

- **Konvexnost a konkávnost funkce**

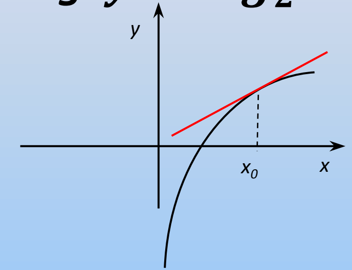
Pro lepší pochopení pojmů využijeme následující příklad:

Př. Sestrojte grafy funkcí: $\boldsymbol{f}: y = 2^x$, $g: y = \log_2 x$

$\boldsymbol{f: y = 2^x}$



$\boldsymbol{g: y = log_2\, x}$



Graf funkce je „nad tečnou“.
Funkce f je **konvexní v bodě x_0 .**

Graf funkce je „pod tečnou“.
Funkce f je **konkávní v bodě x_0 .**

Funkce ***f*** je **ryze konvexní v bodě x_0** ,
- jestliže lze v bodě $[x_0; f(x_0)]$ grafu funkce ***f*** sestrojit tečnu a
- existuje-li takové číslo $\delta > 0$, tak, že pro každé $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$
leží bod $[x; f(x)]$ **nad tečnou**.

Funkce ***f*** je **ryze konkávní v bodě x_0** ,
- jestliže lze v bodě $[x_0; f(x_0)]$ grafu funkce ***f*** sestrojit tečnu a
- existuje-li takové číslo $\delta > 0$, tak, že pro každé $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$
leží bod $[x; f(x)]$ **pod tečnou**.

Nápověda: graf funkce tvaru $\vee$ je … konVexní, graf funkce tvaru $\wedge$ je … konkÁvní

- **Konvexnost a konkávnost funkce a 2.derivace**

Pro určení konvexnosti a konkávnosti využijeme 2.derivaci:

Je-li $f''(x_0) > 0$, pak je funkce f v bodě x_0 **konvexní**.

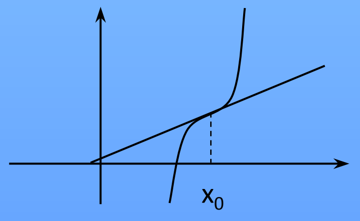
Je-li $f''(x_0) < 0$, pak je funkce f v bodě x_0 **konkávní**.

Funkce konvexní, resp. konkávní v intervalu

Jestliže v každém bodě intervalu platí, že $f''(x) > 0$, pak je funkce f v celém intervalu **konvexní**.
Jestliže v každém bodě intervalu platí, že $f''(x) < 0$, pak je funkce f v celém intervalu **konkávní**.

- **Inflexní body**

Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci.
Přechází-li v tomto bodě graf funkce f z polohy „nad tečnou“ do polohy „pod tečnou“ nebo naopak, nazýváme bod x_0 **inflexní bod funkce.**



Platí: $f''(x_0) = 0$

Př. Určete intervaly, ve kterých je daná funkce konvexní, konkávní, a určete inflexní body, pokud existují:

a) $\boldsymbol{y = 3x^2 - 2x + 1}$

$y' = 3.2x - 2 = 6x - 2$

$y'' = 6$

pro $x \in R$ dostáváme $y'' > 0$ … funkce je <u>konvexní v R</u>

b) $\boldsymbol{y = -5x^2 + 3x - 5}$

$y' = -10x + 3$

$y'' = -10$

pro $x \in R$ dostáváme $y'' < 0$ … funkce je <u>konkávní v R</u>

c) $\boldsymbol{y = x^4 - x^3}$

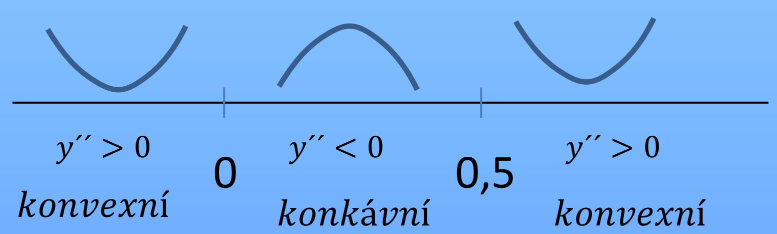
$y' = 4x^3 - 3x^2$

$y'' = 12x^2 - 6x$

položíme $y'' = 0$

$12x^2 - 6x = 0$

$x_1 = 0; x_2 = 0,5$ … inflexní body



d) $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}}$

$y' = -2.x^{-3}$

$y'' = 6.x^{-4} = \frac{6}{x^4}$

položíme $y'' = 0$

$$\frac{6}{x^4} = 0$$

pro $x \in R\backslash\{0\}$ dostáváme $y'' > 0$ … funkce je <u>konvexní</u>

neexistují inflexní body

e) $\boldsymbol{y = tg\ x\ ;x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)}$

$y' = \frac{1}{cos^2 x}$

$y'' = \frac{-1.(2.\cos x.(-\sin x))}{cos^4 x} = \frac{2.\sin x}{cos^3 x}$

položíme $y'' = 0$

$$\frac{2.\sin x}{cos^3 x} = 0$$

$$x = 0$$

… inflexní bod

$-\frac{\pi}{2}$ 0 $\frac{\pi}{2}$

$y'' < 0$ $y'' > 0$

$konkávní$ $konvexní$

- **Užití derivace při výpočtu některých limit**

Při výpočtu některých limit lze s úspěchem využít derivace.

Jedná se zejména o limitu: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

v případě, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$

Jde o neurčité výrazy $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$.

Při výpočtu využijeme tyto věty:

***L´Hospitalovo pravidlo 1*.**

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje také $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

***L´Hospitalovo pravidlo 2*.**

Nechť $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje také $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Poznámka: Obě pravidla platí také pro limitu v bodě <u>zprava</u>, <u>zleva</u> a pro limitu v <u>nevlastních bodech</u>.

Získáme-li po použití *L´Hospitalova pravidla* opět limitu typu $\frac{0}{0}$, resp. $\frac{\infty}{\infty}$, použijeme znovu *L´Hospitalovo pravidlo:* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$

Př. Užitím *L´Hospitalova pravidla* vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{2x-3} = \frac{2}{-1} = -2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3+5x-2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2+5}{2x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6x}{2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \,.\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

- **Postup při vyšetřování průběhu funkce**

1. **Definiční obor** - *D(f)*, funkce sudá, lichá, periodická.
2. Výpočet **jednostranné limity** v bodech, v nichž není funkce definována.
   Výpočet **limity v nevlastních bodech**, intervaly spojitosti.
3. **Průsečíky grafu** funkce s osami *x* a *y* , znaménka funkčních hodnot.
4. Výpočet **1.derivace**.
   Určení **stacionárních bodů** a bodů, ve kterých 1.derivace neexistuje.
5. Určení **lokálních a globálních extrémů** a intervalů monotónnosti.
6. Výpočet **2.derivace**.
   Určení **inflexních bodů** a bodů, ve kterých 2.derivace neexistuje.
7. Určení **intervalů konvexnosti a konkávnosti**.
8. Výpočet **asymptot** .
9. **Obor hodnot** - *H(f)*.
10. **Graf funkce**.

Př. Vyšetřete průběh funkce:

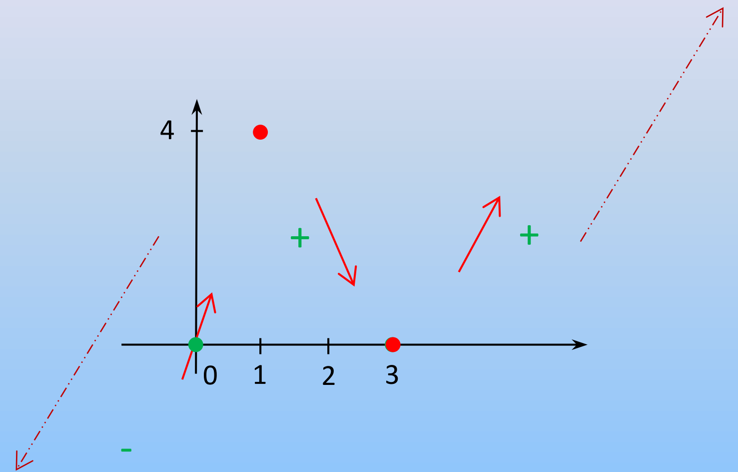
a) $f: y = x^3 - 6x^2 + 9x$

---

1. $D(f) = R$, není ani lichá ani sudá

2. Limity v nevlastních bodech:

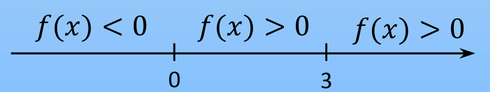
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



3. Průsečíky s osami :

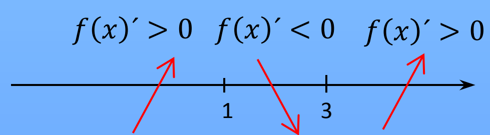
- s osou *x* : $X_1 = [0;0]$, $X_2 = [3;0]$
- s osou *y* : $Y_1 = [0;0]$,

Znaménka funkčních hodnot:



4. $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y' = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1 \lor x = 3$ ....stacionární body ?

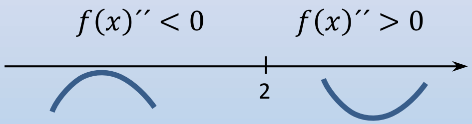


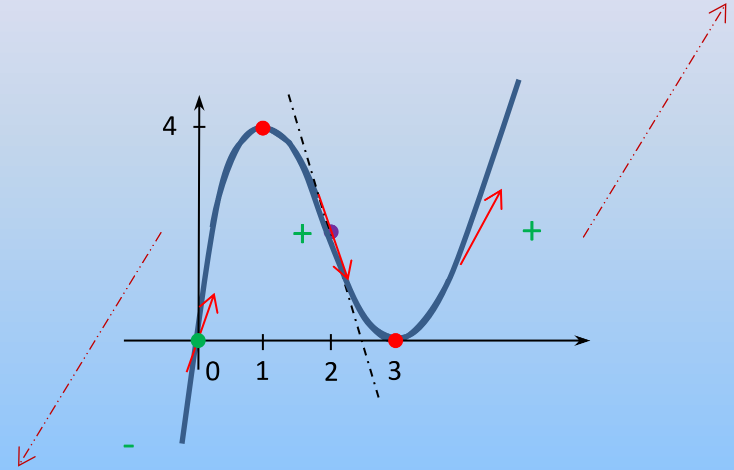
5. V bodě x = 1 … lokální maximum y = 4

V bodě x = 3 … lokální minimum y = 0

6. $y'' = 6x - 12$

$y'' = 0 \qquad \Leftrightarrow x = 2$ ....inflexní bod ?





7. V $(-\infty, 2)$ … konkávní

V $(2, +\infty)$ … konvexní

V bodě x = 2 … inflexní bod

8. Asymptoty:

se směrnicí: *y=ax+b*... $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 6x + 9\right) = +\infty$

Nemá asymptoty se směrnicí!

bez směrnice: ... Nemá asymptoty bez směrnice (*D(f) = R*) !

9. *H(f) = R*

10. Graf

Referenční seznam:

- Hrubý, Dag, Kubát, Josef.
  Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. 2. vydání.
  Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-210-6.

Prezentaci vytvořila ***Mgr. Bc. Eva Vengřínová,*** vyučující předmětu matematika na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.

Prezentace je určena pro podporu výuky matematiky na středních odborných školách stavebních , oboru 78 - 42 - M/01 Technické lyceum.

Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Vytvořeno v rámci projektu OP VK "Nová cesta za vzděláním", registrační číslo CZ.1.07/1.5.00/34.0034,

za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ