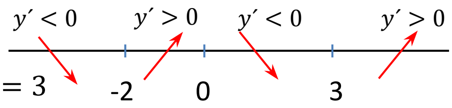
Výsledky

Př.1. Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce :

a) $f: y = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$

$$y' = 12x^3 - 12x^2 - 72x$$
$$y' = 0$$
$$12x.(x^2 - x - 6) = 0$$
$$x.(x-3).(x+2) = 0$$

Stacionární body: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 3$

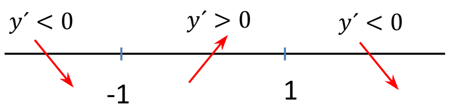


Funkce je rostoucí v intervalech $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$.
Funkce je klesající v intervalech $(-\infty, -2) \cup (0,3)$
V bodě $x_1 = -2$ je lokální minimum s hodnotou $y = -64$
V bodě $x_2 = 0$ je lokální maximum s hodnotou $y = 0$
V bodě $x_3 = 3$ je lokální minimum s hodnotou $y = -189$

b) $f: y = 3x - x^3$

$$y' = 3 - 3x^2$$
$$y' = 0$$
$$3.(1 - x^2) = 0$$
$$3.(1-x).(1+x) = 0$$

Stacionární body: $x_1 = -1, x_2 = 1$

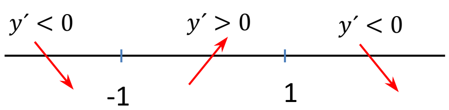


Funkce je rostoucí v intervalu $(-1, 1)$.
Funkce je klesající v intervalech $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
V bodě $x_1 = -1$ je lokální minimum s hodnotou $y = -2$
V bodě $x_2 = 1$ je lokální maximum s hodnotou $y = 2$

c) $f: y = \frac{2x}{x^2+1}$

$$y' = \frac{2.(x^2+1) - 2x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2.(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$
$$y' = 0$$
$$2.(1 - x^2) = 0$$
$$2.(1-x).(1+x) = 0$$

Stacionární body: $x_1 = -1, x_2 = 1$



Funkce je rostoucí v intervalu $(-1, 1)$.
Funkce je klesající v intervalech $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
V bodě $x_1 = -1$ je lokální minimum s hodnotou $y = -1$
V bodě $x_2 = 1$ je lokální maximum s hodnotou $y = 1$

evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.

Př.2. Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce :

a) $y = \sin 2x \,, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

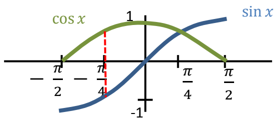
Nejprve upravíme funkci: $y = \sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

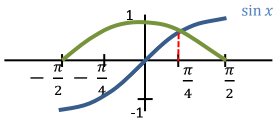
$y' = 2.[\cos x . \cos x + \sin x . (-\sin x)] = 2.(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$$y' = 0$$

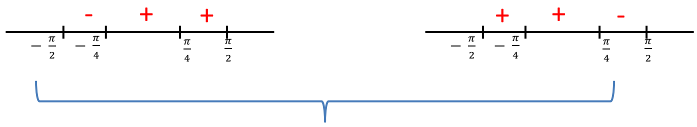
$$2.(\cos x + \sin x).(\cos x - \sin x) = 0$$

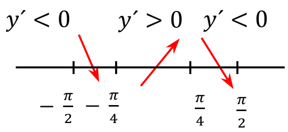
$(\cos x + \sin x) = 0$ $\qquad\qquad$ $(\cos x - \sin x) = 0$





Stacionární body: $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{\pi}{4}$





Funkce je rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Funkce je klesající v intervalech $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

V bodě $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ je lokální minimum s hodnotou $y = -1$

V bodě $x_2 = \frac{\pi}{4}$ je lokální maximum s hodnotou $y = 1$

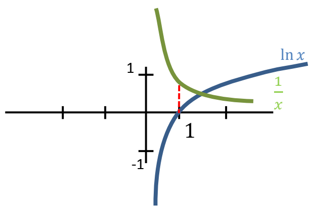
b) $y = \ln^2 x \quad , D(f) = R^+$

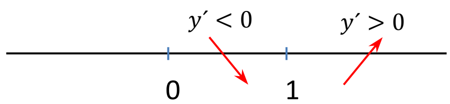
$y' = 2.\ln x . \frac{1}{x}$

$$y' = 0$$

$$2.\ln x . \frac{1}{x} = 0$$

Stacionární bod: $x = 1$





Funkce je rostoucí v intervalu $(1, \infty)$.

Funkce je klesající v intervalu $(0, 1)$

V bodě $x = 1$ je lokální minimum s hodnotou $y = 0$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.

c) $y = x.e^{-x^2}$

$$y' = 1.e^{-x^2} + x.e^{-x^2}.(-2x) = e^{-x^2}.(1-2x^2)$$

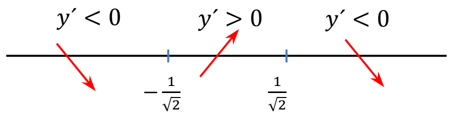
$$y' = 0$$

$$\underbrace{e^{-x^2}}_{+}.(1-2x^2) = 0$$

$$2\left(\frac{1}{2} - x^2\right) = 0$$

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + x\right) = 0$$

Stacionární body: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Funkce je rostoucí v intervalu $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Funkce je klesající v intervalu $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$

V bodě $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ je lokální minimum s hodnotou $y = -\frac{1}{\sqrt{2e}}$

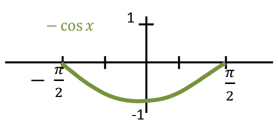
V bodě $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ je lokální maximum s hodnotou $y = \frac{1}{\sqrt{2e}}$

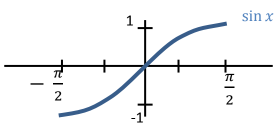
d) $y = \cos^2 x$

$$y' = 2.\cos x.(-\sin x)$$

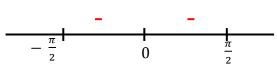
$$y' = 0$$

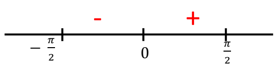
$$-2.\cos x.\sin x = 0$$

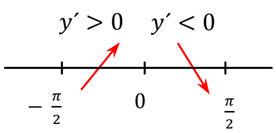




Stacionární bod: $x = 0$







Funkce je rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Funkce je klesající v intervalech $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

V bodě $x = 0$ je lokální maximum s hodnotou $y = 1$

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.

Př.3. Najděte globální a lokální extrémy funkcí v daných intervalech

a) $y = x^2 - 6x + 10$; $x \in \langle -1; 5 \rangle$

$$y' = 2x - 6 = 2.(x-3) = 0$$

Stacionární bod: $x = 3$

$$y'' = 2$$

Lokální extrémy funkce:

pro bod $x = 3$ dostáváme $y''(3) = 2 > 0$ … <u>lokální minimum</u>, s hodnotou $y = 1$

Hodnota v krajích bodech intervalu:

pro bod $x = -1$ dostáváme hodnotu $y = 17$

pro bod $x = 5$ dostáváme hodnotu $y = 5$

Globální extrémy funkce:

v bodě $x = -1$ … <u>globální maximum</u>

v bodě $x = 3$ … <u>globální minimum</u>

b) $y = x - \ln x$; $x \in \langle 1; e)$

$$y' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = 0$$

Stacionární bod: $x = 1$

$$y'' = -\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

Lokální extrémy funkce:

pro bod $x = 1$ dostáváme $y''(1) = 1 > 0$ … <u>lokální minimum</u>, s hodnotou $y = 1 - \ln 1 = 1$

Hodnota v krajích bodech intervalu:

pro bod $x = e$ dostáváme hodnotu $y = e - \ln e = e - 1$

Globální extrémy funkce:

v bodě $x = 1$ … <u>globální minimum</u>

v bodě $x = e$ … <u>neexistuje</u> globální maximum (protože $e \notin D(f)$)

c) $y = \sin 3x$; $x \in (-\pi; \pi)$

$$y' = \cos 3x \,.\, 3 = 0$$

Stacionární bod: $x = \frac{\pi}{6}$

$$y'' = 3.(-\sin 3x).3 = -6 \,.\, \sin 3x$$

Lokální extrémy funkce:

pro bod $x = \frac{\pi}{6}$ dostáváme $y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -6 < 0$ … <u>lokální maximum</u>, s hodnotou $y = \sin 3.\frac{\pi}{6} = 1$

Hodnota v krajích bodech intervalu:

pro bod $x = -\pi$ dostáváme hodnotu $y = \sin(-\pi) = 0$

pro bod $x = \pi$ dostáváme hodnotu $y = \sin(\pi) = 0$

Globální extrémy funkce:

v bodě $x = \frac{\pi}{6}$ … <u>globální maximum</u>

<u>neexistuje</u> globální minimum (protože: $-\pi \notin D(f), \pi \notin D(f)$)

evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.

Př.4. Určete intervaly, ve kterých je daná funkce konvexní, konkávní, a určete inflexní body, pokud existují:

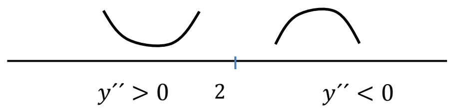
a) $y = -x^3 + 6x^2 + 32$

$y' = -3x^2 + 12x$

$y'' = -6x + 12 = 0$

$6.(2 - x) = 0$

$x = 2$……inflexní bod



Funkce je konvexní v intervalu $(-\infty, 2)$.
Funkce je konkávní v intervalu $(2, \infty)$

b) $y = \frac{3}{x+2}$

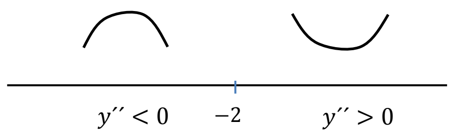
$y = \dfrac{3}{x+2} = 3.(x+2)^{-1}$

$y' = -3(x+2)^{-2}$

$y'' = 6.(x+2)^{-3} = 0$

$\frac{6}{(x+2)^3} = 0$

Neexistuje inflexní bod



Funkce je konkávní v intervalu $(-\infty, -2)$.
Funkce je konvexní v intervalu $(-2, \infty)$

c) $y = \frac{-2x}{1+x^2}$

$y' = \frac{-2.(1+x^2)-(-2x).2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

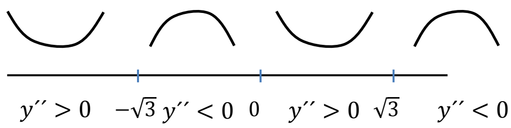
$y'' = 2.\frac{2x.(x^2+1)^2-(x^2-1).2.(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4} = 2.\frac{(x^2+1).[2x.(x^2+1)-(x^2-1).4x]}{(x^2+1)^4} = 2.\frac{2x.(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$

$2.\frac{2x.(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 0$

Protože $(x^2+1)^3 > 0$, pak:

$x.(3 - x^2) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$……inflexní body



Funkce je konvexní v intervalech $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$.
Funkce je konkávní v intervalu $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.

Př.5. Vyšetřete průběh funkce :

a) $y = \frac{x^2}{x-1}$,

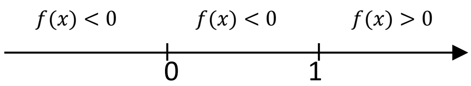
1.$D(f) = R \setminus \{1\}$, není ani lichá ani sudá

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$

$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$

3.Průsečíky s osou y : y = 0

Průsečíky s osou x : x = 0

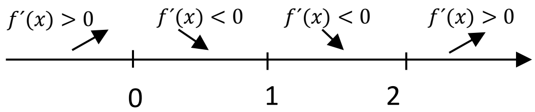


4.$y' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $y' = 0 \iff x = 0 \vee x = 2$….stacionární body ?

5. Lokální extrémy, intervaly monotónnosti:

V bodě x = 0 … lokální maximum y = 0

V bodě x = 2 … lokální minimum y = 4

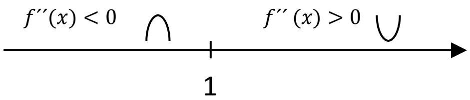


6. $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$ $\qquad$ $y'' \neq 0 \iff$….neexistuje inflexní bod

7. Intervaly konvexnosti, konkávnosti:

V intervalu $(-\infty, 1)$ … konkávní

V intervalu $(1, +\infty)$ … konvexní



8.Asymptoty: - <u>se směrnicí</u>…

$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ $\qquad$ nebo $\qquad$ $a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1$ nebo $\quad b = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

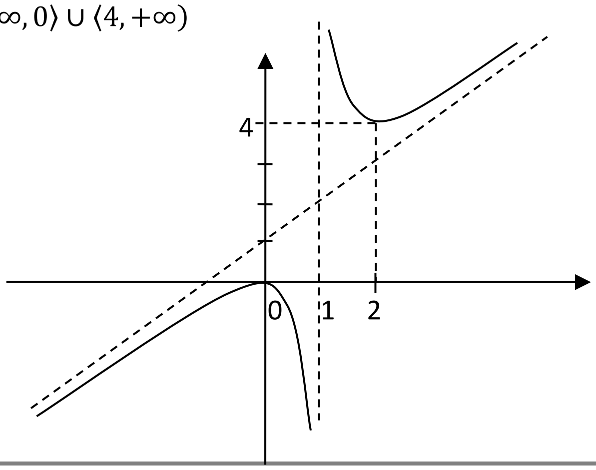
Asymptota se směrnicí $\qquad$ $\boldsymbol{y = x + 1}$.

- <u>bez směrnice</u>: protože $\qquad \lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$ $\qquad$ a $\qquad \lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$

existuje asymptota bez směrnice $\qquad$ $\boldsymbol{x = 1}$

9. $H(f) = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 4, +\infty)$

10. Graf:



evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

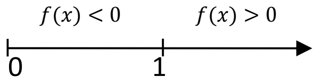
Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.

b) $y = \frac{\ln x}{x}$

1.$D(f) = R^+$, není ani lichá ani sudá

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$,

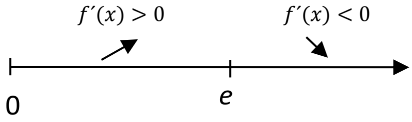
3.Průsečíky s osou y : neexistuje
Průsečíky s osou x : x = 1



4.$y' = \frac{1-lnx}{x^2}$ $y' = 0 \iff x = e$ ….stacionární bod ?

5. Lokální extrémy, intervaly monotónnosti:

V bodě $x = e$ … lokální maximum $y = \frac{1}{e}$



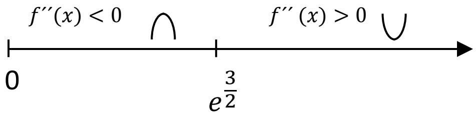
6. $y'' = \frac{2\,lnx-3}{x^3}$ $y'' = 0 \iff \ln x = \frac{3}{2} = e^{\frac{3}{2}}$….inflexní bod ?

7. Intervaly konvexnosti, konkávnosti:

v $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ … konkávní

v $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ … konvexní

Bod $x = e^{\frac{3}{2}}$….inflexní bod



8. Asymptoty: - <u>se směrnicí</u>…

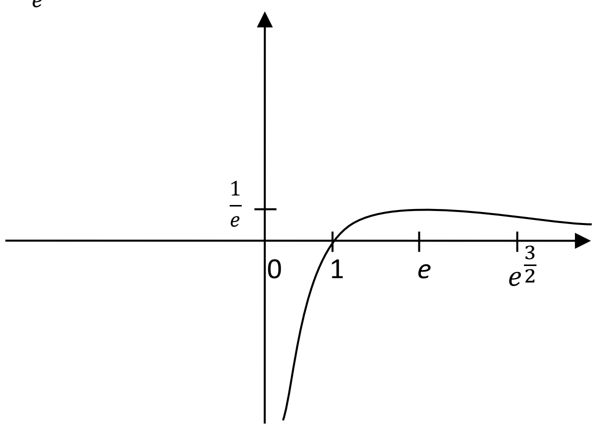
$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0$ … Asymptota se směrnicí $\boldsymbol{y = 0}$.

- <u>bez směrnice</u>: protože $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ … existuje asymptota bez směrnice $\boldsymbol{x = 0}$

9. $H(f) = (-\infty, \frac{1}{e}\rangle$

10. Graf:



evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.

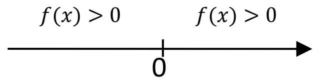
c) $y = x^2 . e^{-x}$

1.$D(f) = R$, není ani lichá ani sudá

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 . e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 . e^{-x} = +\infty$,

3.Průsečíky s osou y : y = 0

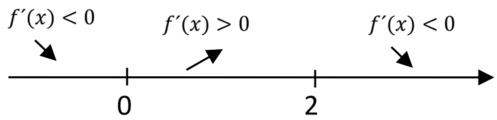
Průsečíky s osou x : x = 0



4.$y' = 2x . e^{-x} - x^2 . e^{-x}$

$y' = 0 \iff x . e^{-x} . (2 - x) = 0 \iff x = 0 \lor x = 2$ ….stacionární body ?

5. Lokální extrémy, intervaly monotónnosti:



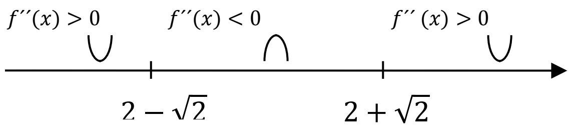
V bodě x = 0 … lokální minimum $y = 0$

V bodě x = 2 … lokální maximum $y = 4\, e^{-2}$

6. $y'' = 2\, e^{-x} - 2x . e^{-x} - 2x . e^{-x} + x^2 . e^{-x} = (x^2 - 4x + 2) . e^{-x}$

$y'' = 0 \iff (x^2 - 4x + 2) = 0 \iff x = 2 + \sqrt{2} \lor x = 2 - \sqrt{2}$… …inflexní bod ?

7. Intervaly konvexnosti, konkávnosti:



v $\left(-\infty, 2 - \sqrt{2}\right)$ … konvexní

v $\left(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right)$ … konkávní

v $\left(2 + \sqrt{2}, +\infty\right)$ … konvexní

Body $x = 2 - \sqrt{2}$ a $x = 2 + \sqrt{2}$….inflexní body

8. Asymptoty: - <u>se směrnicí</u>…

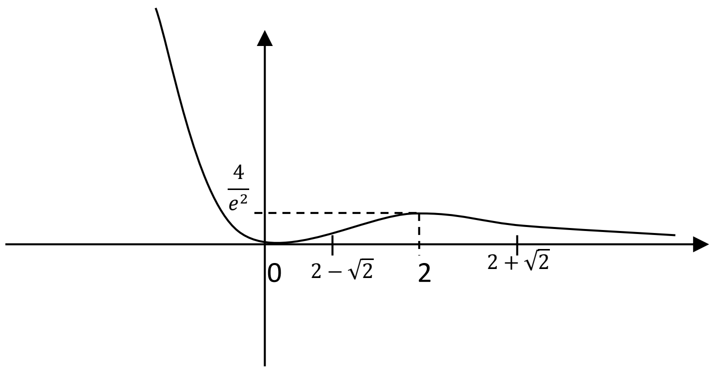
$a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x . e^{-x} = 0$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 . e^{-x} = 0$ … Asymptota se směrnicí $\boldsymbol{y = 0}$.

- <u>bez směrnice</u>: neexistuje asymptota bez směrnice

9. $H(f) = R_0^+$

10. Graf:



evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pracovní list byl vytvořen v rámci projektu "Nová cesta za poznáním", reg. č. CZ.1.07/1.5.00/34.0034, za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu ČR.