evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

2. Spojitost funkce

2.2. Spojitost funkce v intervalu

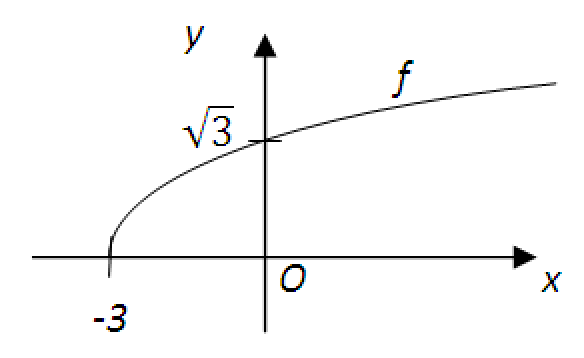
- ***Spojitost funkce v intervalu***

Od spojitosti funkce v bodě přejdeme ke spojitosti funkce v intervalu.

Nejprve budeme řešit **jednostrannou spojitost**.

- **spojitost zprava**

Využijeme graf funkce $f\colon y = \sqrt{x+3}$



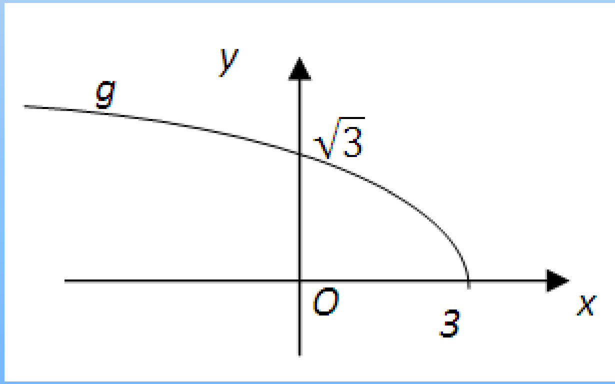
D (f) = $\langle$ ***-3; +∞)***

Funkce není definována v levém okolí bodu -3.

Funkce $f\colon y = \sqrt{x+3}$ *je v bodě* ***-3*** ***spojitá zprava***

- **spojitost zleva**

Využijeme graf funkce $g\colon y = \sqrt{3-x}$



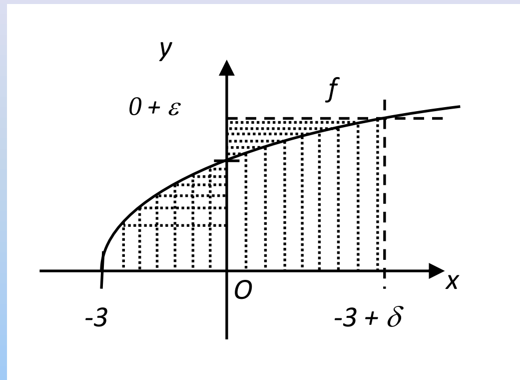
D (f) = (-∞; 3 $\rangle$

Funkce není definována v pravém okolí bodu 3.

Funkce $g\colon y = \sqrt{3-x}$ *je v bodě* ***3*** ***spojitá zleva***

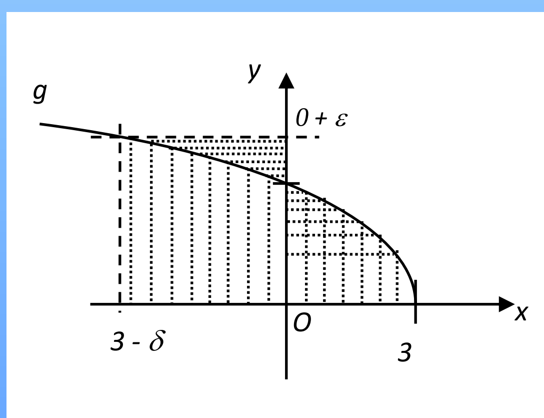
- **Definice jednostranné spojitosti**

Funkce ***f*** je **v bodě *a* spojitá <u>zprava</u>**, jestliže



- ke každému $\varepsilon > 0$
- existuje $\delta > 0$ tak, že
- pro všechna reálná $x \in \langle a, a + \delta)$ je
- $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Funkce ***f*** je **v bodě *a* spojitá <u>zleva</u>**, jestliže



- ke každému $\varepsilon > 0$
- existuje $\delta > 0$ tak, že
- pro všechna reálná $x \in (a - \delta, a \rangle$ je
- $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Funkce ***f*** je **<u>spojitá</u> v bodě *a*** , právě když je v tomto bodě **spojitá zprava a zleva** .

- **Definice funkce spojité v intervalu**

Funkce je spojitá v otevřeném intervalu (*a, b*), je-li
- spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Funkce je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a , b \rangle$, je-li
- spojitá v (*a, b*) a
- v bodě ***a*** je spojitá zprava a v bodě ***b*** spojitá zleva.

!! Poznámka:

Všechny elementární funkce jsou spojité v intervalech, ve kterých jsou definovány , např. :

- Funkce ***polynomické*** a funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ jsou spojité v **R**.
- Funkce $f : y = a^x$ a $g : y = \log_a x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce $h : y = x^{1/n}$, $n \in N$ je pro:
  - ***n*** liché ……spojitá v **R**
  - ***n*** sudé ……spojitá v intervalu $\langle 0 , +\infty)$.

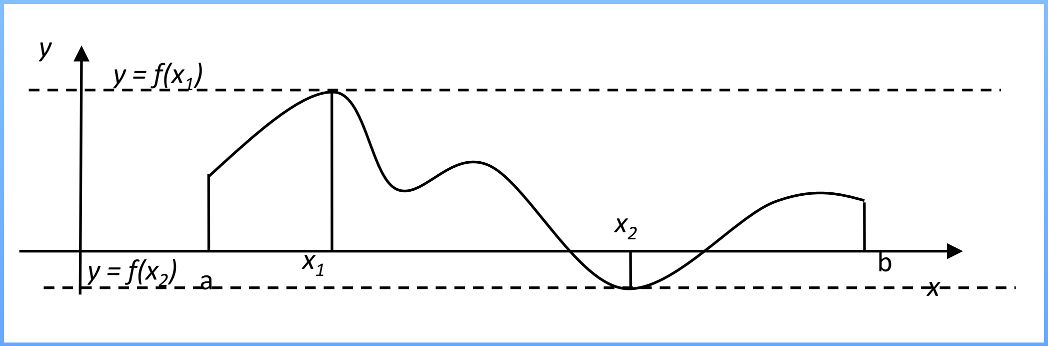
- **Věty o funkcích spojitých v uzavřeném intervalu:**

Věta Weierstrassova

Je- li funkce *f* spojitá v uzavřeném intervalu $\langle \boldsymbol{a, b} \rangle$, pak existuje
- alespoň jeden takový bod $\boldsymbol{x_1} \in \langle \boldsymbol{a, b} \rangle$, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a, b} \rangle$ platí : $\boldsymbol{f(x) \leq f(x_1)}$
- alespoň jeden takový bod $\boldsymbol{x_2} \in \langle \boldsymbol{a, b} \rangle$, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a, b} \rangle$ platí : $\boldsymbol{f(x) \geq f(x_2)}$

Funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle \boldsymbol{a, b} \rangle$ nabývá v tomto intervalu alespoň v jednom bodě **maxima** a alespoň v jednom bodě **minima**.→ Tato funkce je **omezená**!

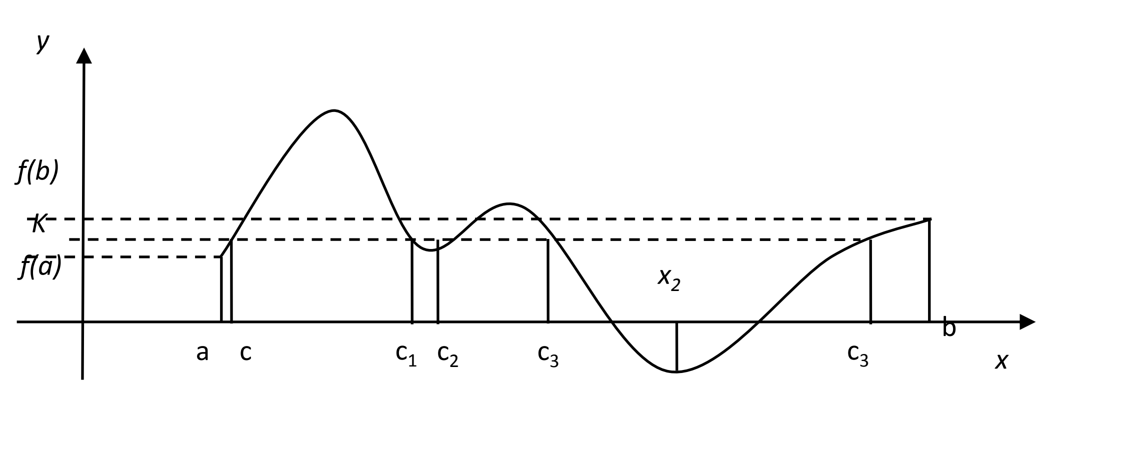
Geometrická interpretace Weierstrassovy věty:



- **Věty o funkcích spojitých v uzavřeném intervalu:**

Věta Bolzanova - Weierstrassova

Je- li funkce *f* spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a ***f(a)*** $\neq$ ***f(b)***, potom

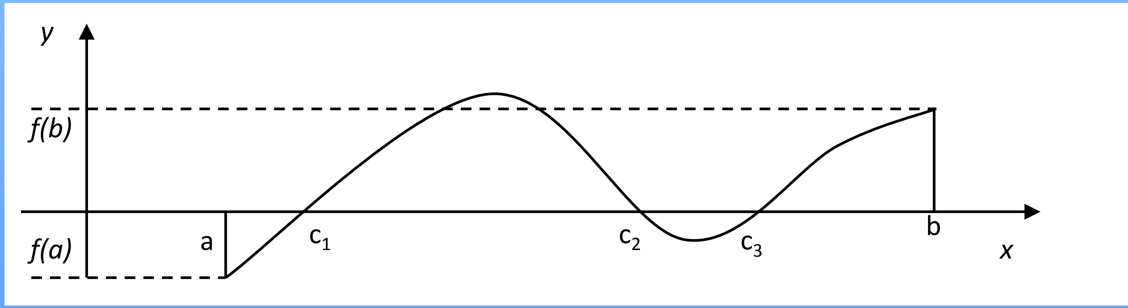


- ke každému číslu **K**, které leží mezi čísly ***f(a)*** < **K** < ***f(b)***

- existuje <u>alespoň</u> <u>jeden</u> takový bod ***c*** ∈ **(*a, b*)** , že ***f(c)*** = **K** .

Důsledek B-W věty: ***Darbouxova*** (čteme darbúova) ***vlastnost*** spojitých funkcí.

Je- li funkce *f* spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a mají-li čísla ***f(a)*** a ***f(b)*** různá znaménka, (tj. $f(a) . f(b) < 0$), potom



- existuje <u>alespoň</u> <u>jeden</u> takový bod , v němž platí ***f(c)*** = **0**

V okolí bodu *c* mění hodnoty funkce *f* znaménko!!! .

- Příklady

1. <u>Ukažte, že rovnice $x^3 + 3x - 1 = 0$ má kořen z intervalu (0 ; 1)</u>

Využijeme *Darbouxovu vlastnost* spojitých funkcí:
Je- li funkce *f* spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a mají-li čísla $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, potom existuje <u>alespoň jeden</u> takový bod , v němž platí **$f(c) = 0$**

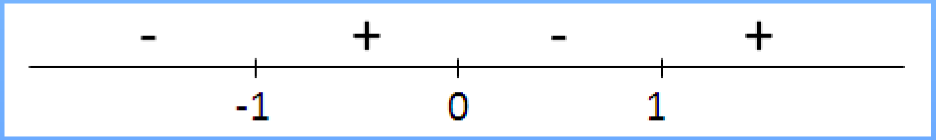
Funkce $f(x) = x^3 + 3x - 1$ je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle 0 ; 1 \rangle$.

Platí: $f(0) = -1$ a $f(1) = 3$ a tedy $f(0) \, . \, f(1) = -3 < 0$

Proto existuje alespoň jedno $c \in (0 ; 1)$ pro něž platí **$f(c) = 0$** , tzn. že graf funkce protne osu ***x*** v intervalu (0 ; 1) alespoň jednou.
Odtud: rovnice $x^3 + 3x - 1 = 0$ **má kořen z intervalu (0 ; 1)** .

2. <u>V R řešte nerovnici $x^3 > x$</u>

Nejdříve upravíme: $x^3 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \, . \, (x + 1) \, . \, (x - 1) > 0$
Funkce $f(x) = x \, . \, (x + 1) \, . \, (x - 1)$ má tři nulové body: $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, které znázorníme na číselné ose :



Funkce $f(x)$ je spojitá v R ,
nemění v **$(-\infty ; -1)$, $(-1; 0)$, $(0 ; 1)$, $(1 ; \infty)$ znaménka** !
Řešením nerovnice $\boldsymbol{x^3 - x > 0}$ je $\boldsymbol{x \in (-1; 0) \cup (1 ; \infty)}$

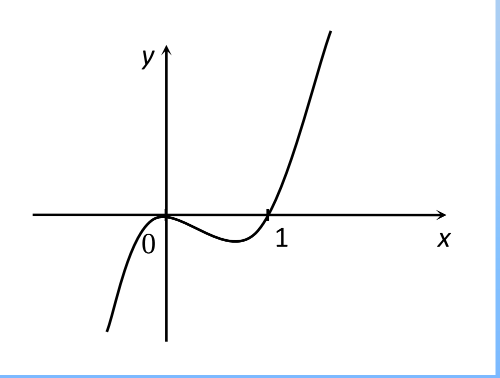
3. <u>V R řešte nerovnici $x^3 > x^2$</u>

Po úpravě dostaneme: $x^3 - x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \,.\, (x-1) > 0$

Funkce $f(x) = x^2 \,.\, (x-1)$ má dva nulové body: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, které znázorníme na číselné ose :

Pozor, kořen $c_1 = 0$, je <u>*dvojnásobný kořen*</u>, proto funkce **nemění** v okolí tohoto bodu znaménko !

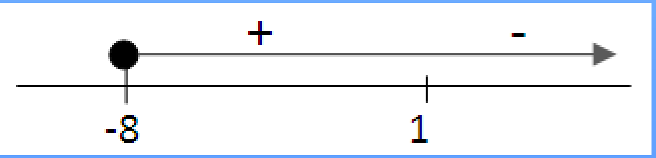
Pro úplnost uvedeme graf funkce
$f(x) = x^3 - x^2$



4. <u>V R řešte nerovnici</u> $\sqrt{x+8} > x+2$

Funkce $f(x) = \sqrt{x+8} - x - 2$ je spojitá v intervalu $\langle -8 ;+\infty \rangle$.

Nulové body získáme řešením rovnice: $\sqrt{x+8} = x+2 \;\Rightarrow\; (x+4)\,.\,(x-1) = 0$, odtud $x = -4$, $x = 1$ (*kořen* $x = -4$ *nevyhovuje*).



Řešením nerovnice je $\boldsymbol{x \in \langle -8; 1)}$

Referenční seznam:

- Hrubý, Dag, Kubát, Josef.
  Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. 2. vydání.
  Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-210-6.

Prezentaci vytvořila ***Mgr. Bc. Eva Vengřínová,*** vyučující předmětu matematika na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.

Prezentace je určena pro podporu výuky matematiky na středních odborných školách stavebních , oboru 78 - 42 - M/01 Technické lyceum.

Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Vytvořeno v rámci projektu OP VK "Nová cesta za vzděláním", registrační číslo CZ.1.07/1.5.00/34.0034,

za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ