evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA STAVEBNÍ OPAVA
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

4. Derivace funkce

4.4. Užití diferenciálního počtu

- **Úlohy z geometrie**

Tečna a normála grafu funkce

Mají-li přímky *p, q* po řadě směrnice k_1, k_2 pak platí : $p \perp q \quad \Leftrightarrow \quad k_1 . k_2 = -1$

Rovnice tečny v bodě T[x_0 , y_0] je : $\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0) . (x - x_0)}$

Rovnice normály v bodě T[x_0 , y_0] je : $\boldsymbol{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} . (x - x_0)}$

Př. Ve kterém bodě má graf funkce $f: y = \sqrt{1 - x^2}$ tečnu se směrnicí = 1 ?
Napište rovnici tečny a normály v tomto bodě.

Směrnice tečny v bodě T[x_0 , y_0]: $\boldsymbol{k_t = f'(x_0)}$

$$f'(x_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{1 - {x_0}^2}} = 1 \qquad odtud : x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

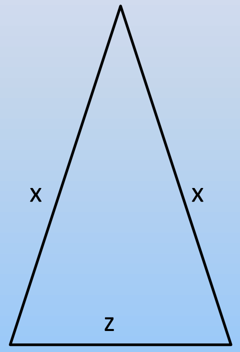
Hledaný bod: T [$-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$]

Rovnice **tečny** v bodě T[$-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$] je : $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 . \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \Rightarrow \boldsymbol{y = x + \sqrt{2}}$

Rovnice **normály** v bodě T[$-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$] je: $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 . \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \Rightarrow \boldsymbol{y = -x}$

Obvody a obsahy rovinných útvarů

Př. Najděte rovnoramenný trojúhelník, který má při daném obvodu maximální obsah.



Obvod: $o = z + 2x$, kde *o = konst.*

Obsah: $S = \frac{1}{2} z . v$, kde $v = \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2} z\right)^2}$

Po dosazení: $S = \frac{1}{2} z . \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2} z\right)^2}$

Vyjádříme obsah pomocí jedné proměnné (např. z) , tzn. dosadíme za $x = \frac{o-z}{2}$:

$$S(z) = \frac{1}{2} z . \sqrt{\left(\frac{o-z}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} z\right)^2} \Rightarrow S(z) = \frac{1}{4} z . \sqrt{o^2 - 2o . z} = \frac{1}{4} z . (o^2 - 2o . z)^{\frac{1}{2}}$$

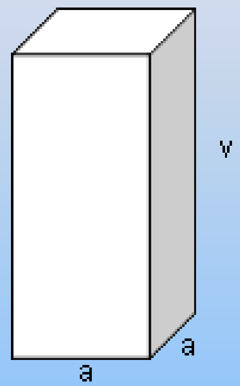
Hledáme bod, v němž má funkce $S(z)$ extrém ,tzn. $S'(z) = 0$

$$S'(z) = \frac{1}{4} . \left(1. (o^2 - 2o. z)^{\frac{1}{2}} + z. \frac{1}{2} . \frac{-2o}{\sqrt{o^2 - 2o.z}}\right) = \frac{1}{4} . \frac{o^2 - 3\, o . z}{\sqrt{o^2 - 2\, o . z}} = 0$$

Odtud: $o^2 - 3\, o . z = 0 \Rightarrow z = \frac{o}{3}$, $x = \frac{o}{3}$ ...**rovnostranný trojúhelník**

Povrchy a objemy těles

Př. Najděte pravidelný čtyřboký hranol, který má při daném povrchu maximální objem.



Povrch: $S = 2a^2 + 4\,a.v$, kde $S = konst$

Odtud : $v = \frac{S-2a^2}{4a}$, pro $a \in \left(0, \sqrt{\frac{S}{2}}\right)$

Objem: $V = a^2.v$

Po dosazení: $V(a) = a^2 . \frac{S-2a^2}{4a} = \frac{a.(S-2a^2)}{4}$

Hledáme bod, v němž má funkce *V(a)* extrém ,tzn. $V'(a) = 0$

$$V'(a) = \frac{1}{4}.\left(1.(S-2a^2) + a.(-4a)\right) = \frac{1}{4}.[S-6a^2] = 0$$

Odtud: $a^2 = \frac{S}{6}$, … $a = \sqrt{\frac{S}{6}}$

(ověříme zda se jedná o maximum: $V'' = \frac{1}{4}.[0-12a] = -3a < 0$)

Dopočítáme: $v = \frac{S-2\left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^2}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \sqrt{\frac{S}{6}} = a$ ……*v=a* …**krychle**

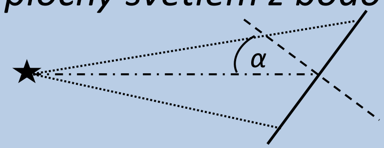
- **Úlohy z fyziky**

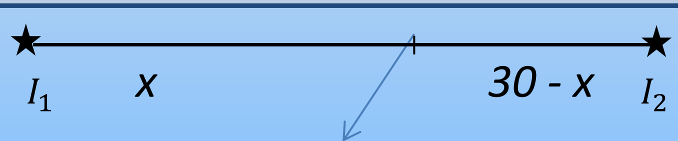
Hledání minima funkce

Př. Dva světelné zdroje jsou umístěny 30 m od sebe a poměr jejich svítivostí je 27 : 8. Najděte na jejich spojnici nejméně osvětlený bod.

Poznámka: Pro osvětlení E dané plochy světlem z bodového zdroje o svítivosti I *platí :*

$$E = \frac{I.\cos\alpha}{r^2}$$





$\alpha = 0°$ $\quad \Longrightarrow \quad \cos 0° = 1$

$$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{I_1.\cos\alpha}{x^2} + \frac{I_2.\cos\alpha}{x^2} = \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(30-x)^2}$$

Hledáme minimum funkce $E(x)$, tzn. $E'(x) = 0$

$$E'(x) = \left(\frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(30-x)^2}\right)' = \frac{-I_1.2x}{x^4} + \frac{-I_2.2.(30-x).(-1)}{(30-x)^4} = \frac{-2.I_1}{x^3} + \frac{2.I_2}{(30-x)^3} = 0$$

Odtud: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{x^3}{(30-x)^3} = \frac{27}{8} \quad \Longrightarrow \boldsymbol{x = 18}$

Nejméně osvětlený bod je 18 m od silnějšího zdroje.

- ***Okamžitá rychlost , okamžité zrychlení***

Okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ čase $\boldsymbol{t_0}$ je *první derivací dráhy* podle času: $\boldsymbol{v(t_0) = s'(t_0)}$

Okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$ čase $\boldsymbol{t_0}$ je *první derivací rychlosti* podle času: $\boldsymbol{a(t_0) = v'(t_0)}$

Př. Určete okamžitou rychlost a okamžité zrychlení pohybu v čase t, je-li jeho dráha daná vztahem : $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g . t^2$

$s_0 \ldots počáteční\ dráha\ (konst.)$ $v_0 \ldots počáteční\ rychlost\ (konst.)$

$v(t) = s'(t) = 0 + v_0 + \frac{1}{2} 2gt$

Okamžitá rychlost: $\boldsymbol{v(t) = v_0 + gt}$

$a(t) = v'(t) = 0 + g$

Okamžité zrychlení: $\boldsymbol{a(t) = g}$

Př. Kámen hozený z výšky $h = 10\ m$ kolmo nahoru, má počáteční rychlost $v_0 = 20\ m.s^{-1}$.

a) Jakou rychlost bude mít kámen v čase $t = 1{,}5\ s$?

b) Za jak dlouho dosáhne kámen maximálnu výšku?

c) Jakou maximální výšku kámen dosáhne? ($g = 10\ m.s^{-2}$)

$h_0 = 10\ m$, $v_0 = 20\ m.s^{-1}$ $\quad s = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g.t^2,$

a) $s = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g.t^2,$

$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$

Rychost v čase $t = 1{,}5\ s$: $\quad v(1{,}5) = 20 - 10.1{,}5$

$\boldsymbol{v(1{,}5) = 5\ m.s^{-1}}$

V čase $t = 1{,}5\ s$ bude mít kámen rychlost $5\ m.s^{-1}$.

b) Maximální výška = bod obratu $\quad v(t) = 0$, $\quad v(t) = v_0 - gt$

$v(t) = 20 - 10t = 0$

Odtud: $\boldsymbol{t = 2\ s}$

Kámen dosáhne maximální výšku za čas $t = 2\ s$.

c) Maximální výška s_{MAX} : $\quad s_{MAX} = s(2) = 10 + 20.2 - \frac{1}{2} 10.2^2 = 30\ m$

Kámen dosáhne maximální výšku $s_{MAX} = 30\ m$.

Př. Těleso sjede po nakloněné rovině 50 m dlouhé za 10 s.
Jaká je jeho konečná rychlost, předpokládáme-li, že dráha je kvadratická funkce času a že počáteční rychlost je nulová.

$s = 50\ m\ , t = 10\ s\ , v_0 = 0\ m.s^{-1}$

$s = a.t^2 + b.t + c,$

$c = 0\ \ \ldots počáteční\ dráha$

$b = 0\ \ \ldots počáteční\ rychlost$

$s = a.t^2,$

$50 = a.10^2,$ odtud: $a = 0{,}5,$

$v(t) = s'(t) = 2a.t$

Rychost v čase $t = 10\ s$:

$$v(10) = 2.0{,}5.10$$

$$\boldsymbol{v(10) = 10\ m.s^{-1}}$$

Konečná rychlost tělesa je 10 $m.s^{-1}$.

Referenční seznam:

- Hrubý, Dag, Kubát, Josef.
  Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. 2. vydání.
  Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-210-6.

Prezentaci vytvořila ***Mgr. Bc. Eva Vengřínová,*** vyučující předmětu matematika na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.

Prezentace je určena pro podporu výuky matematiky na středních odborných školách stavebních , oboru 78 - 42 - M/01 Technické lyceum.

Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Vytvořeno v rámci projektu OP VK "Nová cesta za vzděláním", registrační číslo CZ.1.07/1.5.00/34.0034,

za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky.