



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

2. Spojitosť funkce

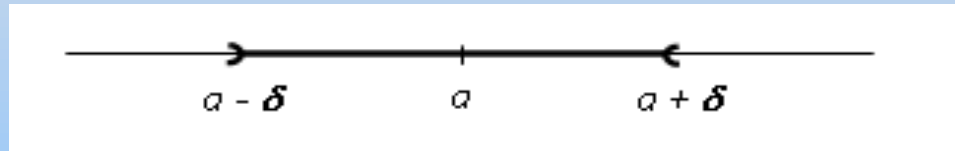
2.1. Spojitosť funkce v bodě

- **Okolí bodu**

Pro přesný popis vlastností funkce v bodě a , zavedeme pojem **okolí bodu a** .

- **Okolím bodu a** nazýváme otevřený interval $U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}^+$ (je kladné reálné číslo).

Číslo a nazýváme **střed okolí** a číslo δ nazýváme **poloměr okolí**.



Pak hovoříme o δ -okolí bodu a , a pro všechna reálná čísla $x \in U(a, \delta)$ platí:

$$a - \delta < x < a + \delta \quad \text{tj.} \quad |x - a| < \delta$$

- **Levým okolím bodu a** nazýváme polootevřený interval $(a - \delta, a]$, kde $\delta \in \mathbb{R}^+$ (je kladné reálné číslo), tj. $a - \delta < x \leq a$
- **Pravým okolím bodu a** nazýváme polouzavřený interval $[a, a + \delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}^+$ (je kladné reálné číslo), tj. $a \leq x < a + \delta$

- **Přírůstek argumentu a přírůstek funkce.**

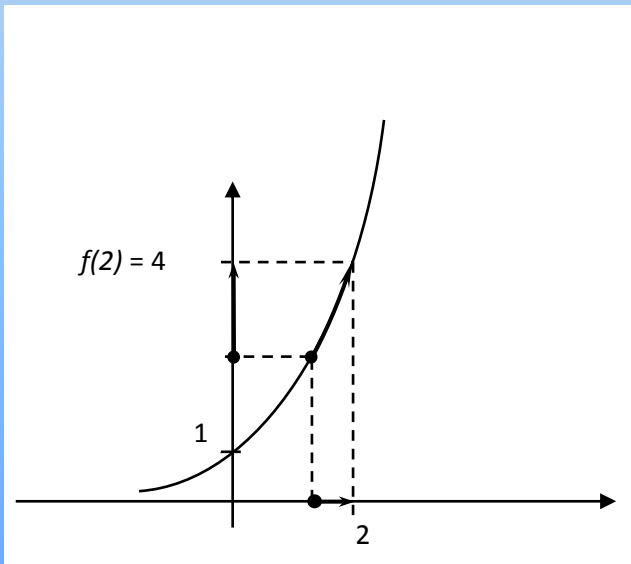
přírůstek argumentu v bodě a je rozdíl: $\Delta x = x - a$

přírůstek funkce v bodě a odpovídající přírůstku Δx je rozdíl: $\Delta y = f(x) - f(a)$

- **Spojitosť funkce v bodě**

Na základě geometrické představy lze říci, že funkce je **spojitá**, jestliže její graf můžeme nakreslit jedním tahem.

Pro bližší pochopení pojmu „spojitá funkce“ využijeme funkci $f: y = 2^x$



Když se bod x blíží k bodu $2 \dots (x \rightarrow 2)$,

- blíží se hodnoty $f(x)$ k hodnotě funkce $f(2) = 4 \dots \dots \dots (f(x) \rightarrow f(2))$.

Budeme říkat, že **funkce je spojitá v bodě 2**.

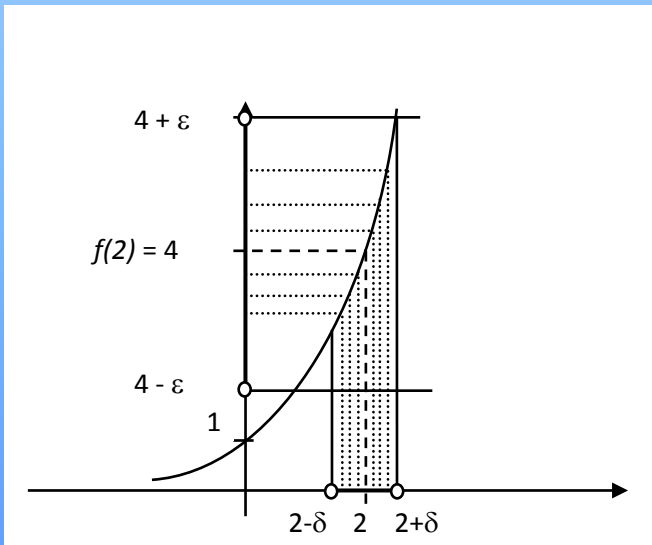
- **Funkce spojitá v bodě a**

Funkce f je **spojitá v bodě a** , jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu $f(a)$ existuje takové okolí bodu a , že pro všechna x z tohoto okolí bodu a patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného okolí bodu $f(a)$.

- Jiná formulace:

Funkce f je **spojitá v bodě a** , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna reálná x platí: je-li $|x - a| < \delta$, pak $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Využijeme opět funkci **$f: y = 2^x$**



Zvolíme-li jakkoliv malé ε -**okolí bodu 4** na ose y ,

- vždy se podaří najít takové δ -**okolí bodu 2** na ose x ,

- že pro všechna $x \in U(2, \delta)$

- náleží hodnoty $f(x) \in U(4, \varepsilon)$ na ose y .

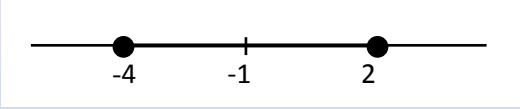
- Funkce $f: y = c, c \in \mathbb{R}$, je spojitá v každém bodě .
- Funkce $f: y = x$ je spojitá v každém bodě .
- Funkce $f: y = \sin x$ je spojitá v každém bodě .

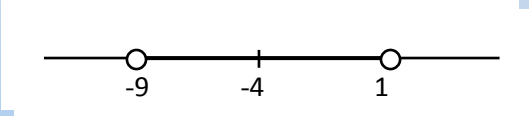
Jsou-li funkce f, g spojité v bodě a , pak je také spojitou funkcí v bodě a jejich

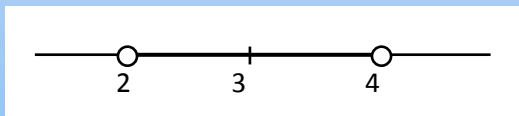
- **součet $f + g$** ,
- **rozdíl $f - g$** ,
- **součin $f \cdot g$**
- a pro $g(a) \neq 0$ také jejich **podíl f/g** .

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné – 2.Spojitosť funkce – 2.1.Spojitosť funkce v bodě

• Příklady:

1. V množině \mathbf{R} řešte nerovnici: $|x+1| \leq 3$
 $\langle -4 ; 2 \rangle$

2. Pomocí intervalu zapište δ - okolí bodu -4 v případě, že $\delta = 5$
 $(-9 ; 1)$

3. Pomocí nerovnice s proměnnou x zapište δ - okolí bodu 3 v případě, že $\delta = 1$
 $|x-3| < 1$

4. Pro $x \in \mathbf{R}$ zapište okolí bodu a ; určete a poloměr r : $|x-5| < 0,5$
 $(4,5 ; 5,5)$ $a = 5 ; r = 0,5$

5. Na základě definice spojitosti funkce v bodě a dokažte, že funkce $f: y = 2x - 1$ je spojitá v bodě 3.

Máme dokázat, že pro $a = 3$ platí: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$, pro něž je $|x - a| < \delta$.

Protože $|f(x) - f(a)| = |2x - 1 - (2 \cdot 3 - 1)| = |2x - 6|$,

bude $|2x - 6| < \varepsilon$, jakmile bude $|x - 3| < \delta$. Stačí zvolit libovolné $\delta \in (0; \varepsilon/2)$.

Referenční seznam:

- Hrubý Dag, Kubát Josef.
Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. 2. vydání.
Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-210-6.

Prezentaci vytvořila **Mgr. Bc. Eva Vengřínová**, vyučující předmětu matematika na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.

Prezentace je určena pro podporu výuky matematiky na středních odborných školách stavebních, oboru 78 - 42 - M/01 Technické lyceum.

Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Vytvořeno v rámci projektu OP VK "Nová cesta za vzděláním", registrační číslo CZ.1.07/1.5.00/34.0034,

za finanční podpory Evropského sociálního fondu a rozpočtu České republiky.



Uvedená práce (dílo) podléhá licenci Creative Commons.

Uveďte autora - Nevyužívejte dílo komerčně - Zachovejte licenci 3.0 Česko.

