STŘEDNÍ
PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA
STAVEBNÍ
OPAVA

Cvičebnice stavební mechaniky

Ing. Karla Labudová

2. vydání

Tato příručka vznikla za finanční podpory Evropského sociálního fondu
a rozpočtu České republiky.

esf evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
RPIC VIP
VZDĚLÁVÁNÍ
INOVACE
PORADENSTVÍ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

1 Síly působící v jednom paprsku **7**
- 1.1 Dvě síly o společném působišti a stejném směru . . . 7
- 1.2 Dvě síly o společném působišti v téže přímce opačného smyslu . . . 9
- 1.3 Skládání více sil působících v téže přímce se společným působištěm různého smyslu . . . 14

2 Centrické síly **19**
- 2.1 Dvě síly různých směrů o společném působišti (dvě centrické síly) . . . 19
- 2.2 Více sil o společném působišti různých směrů (více centrických sil) . . . 31

3 Obecná soustava sil v rovině **47**
- 3.1 Určení výslednice obecné soustavy sil v rovině . . . 47
- 3.2 Určení výslednice rovnoběžných sil v rovině . . . 56
- 3.3 Rovnováha soustavy rovnoběžných sil . . . 65
- 3.4 Rovnováha obecné soustavy sil v rovině . . . 79
- 3.5 Rozklad síly do dvou rovnoběžných směrů . . . 87

4 Těžiště ploch rovinných obrazců a statické veličiny průřezu **95**

5 Statika tuhé desky **109**
- 5.1 Rovnováha tuhé desky . . . 109
- 5.2 Podepření tuhé desky . . . 109
- 5.3 Zatížení stavebních konstrukcí . . . 110
- 5.4 Výpočet reakcí staticky určitých nosníků . . . 111
  - 5.4.1 Prostý nosník . . . 111
  - 5.4.2 Prostý nosník s převislým koncem . . . 120
  - 5.4.3 Konzola . . . 125
  - 5.4.4 Šikmý nosník . . . 131
  - 5.4.5 Lomený nosník . . . 140

6 Klíče k příkladům k procvičení **149**

Předmluva

Vážené žákyně, vážení žáci,

cílem této cvičebnice je dát vám možnost procvičit si učivo, které jste již ve škole probrali, doma a to formou jednoduchých příkladů. V úvodu každé kapitoly je jen velmi stručně shrnuto to nejdůležitější z již probraného učiva. Najdete zde to, co pokládám za nutné stručně zopakovat či sjednotit (například značení veličin apod.) U každé kapitolky je uveden vzorový příklad, jak je dané téma možné řešit a za každou kapitolkou najdete sadu cvičení, které bych byla ráda, abyste si vyzkoušeli doma. V případě, že si s některým cvičením nebudete vědět rady, připojila jsem také klíč k řešení všech těchto cvičení, který najdete úplně vzadu této cvičebnice.

Doufám, že vám tato cvičebnice pomůže poprat se s problémy, se kterými se možná potýkáte a otevře cestu k lepšímu chápání stavební mechaniky jako jednoho z oborů, bez kterého by se stavebnictví neobešlo.

Stavební mechanika je nádherný vědní obor, poznejte to sami.

Ing. Karla Labudová

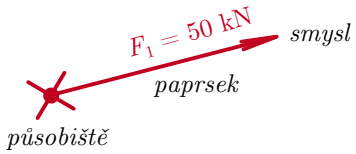
autorka cvičebnice

Statika v rovině

V hodinách stavební mechaniky jste se dozvěděli základní informace o silách. Víte, jaké jsou druhy sil, jak se skládají, resp. rozkládají. Víte také, že statika používá k tomuto účel dva způsoby řešení – početní (přesný a rychlý způsob) nebo grafický (pracnější – jeho přesnost závisí na vaši pečlivosti – ale názorný).

Víte také, že síla je určena:

- působištěm - bodovým, plošným nebo prostorovým ,
- směrem - ten je dán paprskem a smyslem a
- velikostí - v jednotkách N nebo kN (např. 70 kN).



1 Síly působící v jednom paprsku

V úvodu se domluvme, že síly budeme značit F s dolním indexem $1, 2, 3, \ldots, i$ (např. $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_i$ a jejich výslednici budeme značit R.

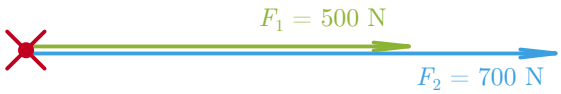
1.1 Dvě síly o společném působišti a stejném směru

Při skládání dvou sil o společném působišti a stejném směru má výslednice těchto sil vždy stejný směr jako síly, jejichž je výslednicí, a její velikost je rovna součtu těchto sil.

Příklad 1.1.1

Určete výslednici dvou sil o společném působišti a stejném směru o velikosti $F_1 = 500\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 700\,\mathrm{N}$.

Zadání



a) početní řešení

$$R = F_1 + F_2 = 500 + 700 = 1\,200\,\mathrm{N}$$

b) grafické řešení (vždy zvolte vhodné měřítko, v tomto případě $1\,\mathrm{cm} = 100\,\mathrm{N}$)

Příklady k procvičení

1.1.A

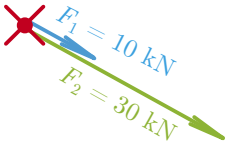
$F_1 = 500\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 300\,\mathrm{N}$

1.1.B

$F_1 = 200\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 800\,\mathrm{N}$

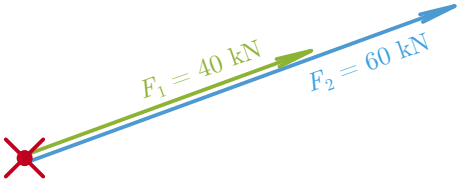
1.1.C

$F_1 = 10\,\mathrm{kN}$ a $F_2 = 30\,\mathrm{kN}$



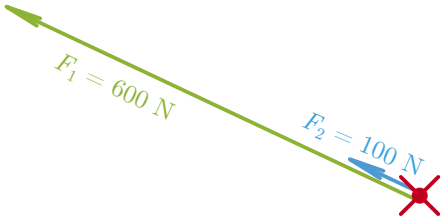
1.1.D

$F_1 = 40\,\mathrm{kN}$ a $F_2 = 60\,\mathrm{kN}$



1.1.E

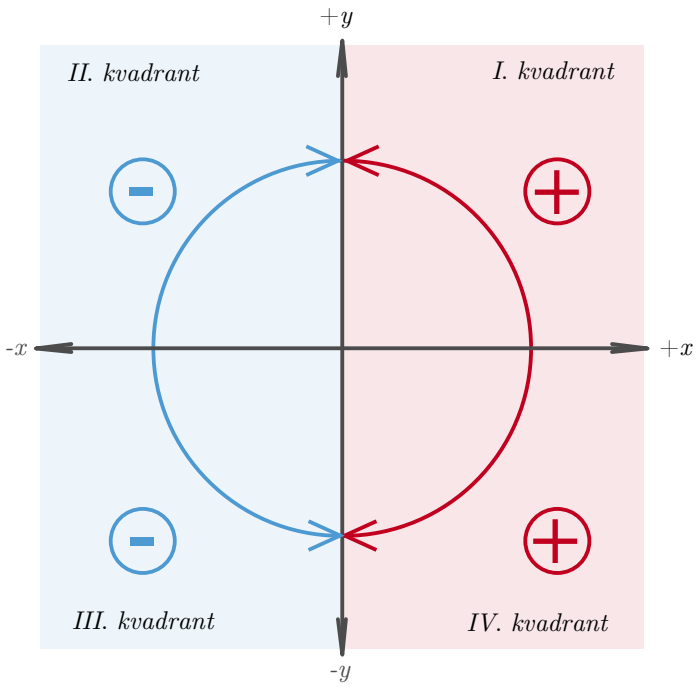
$F_1 = 600\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 100\,\mathrm{N}$



1.2 Dvě síly o společném působišti v téže přímce opačného smyslu

Při skládání dvou sil o společném působišti, stejném paprsku, ale opačného smyslu má výslednice těchto sil vždy stejný paprsek jako obě síly. Smysl má shodný se silou, která je větší. Velikost výslednice je pak rovna také součtu těchto sil, ovšem pozor, zde je už nutné dohodnout pravidla pro kladná a záporná znaménka sil.

Dohodněme se, že všechny síly, které mají směr ve smyslu kladné osy x (tj. I. a IV. kvadrant) budou mít kladné znaménko a naopak všechny síly ve smyslu záporné osy x (tj. II. a III. kvadrant) budou mít záporné znaménko.



Příklad 1.2.1

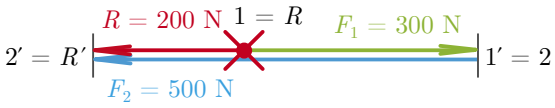
Určete výslednici dvou sil o společném působišti, stejného paprsku, ale opačného smyslu o velikosti $F_1 = 300\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 500\,\mathrm{N}$.

Zadání

a) početní řešení

$$R = F_1 + F_2 = 300 - 500 = -200\,\mathrm{N}$$

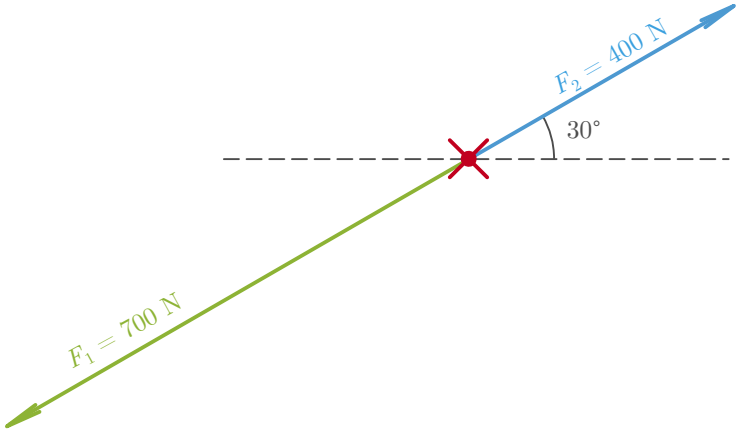
b) grafické řešení



Příklad 1.2.2

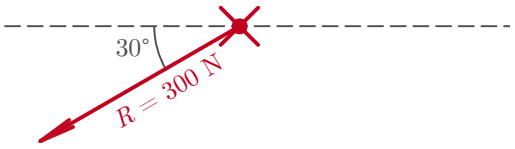
Určete výslednici dvou sil o společném působišti, stejného paprsku, ale opačného smyslu o velikosti $F_1 = 700\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 400\,\mathrm{N}$.

Zadání:

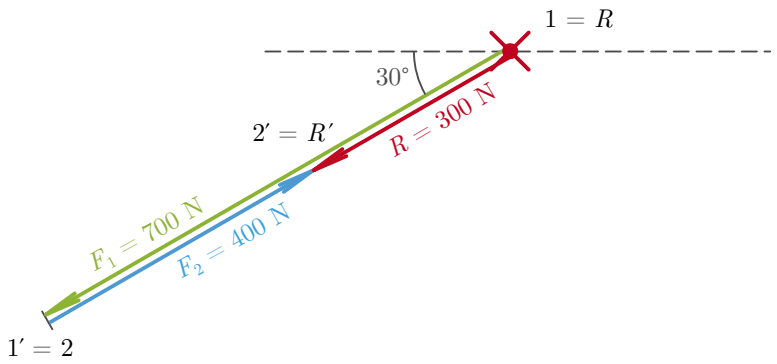


a) početní řešení

$$R = F_1 + F_2 = -700 + 400 = -300\,\mathrm{N}$$

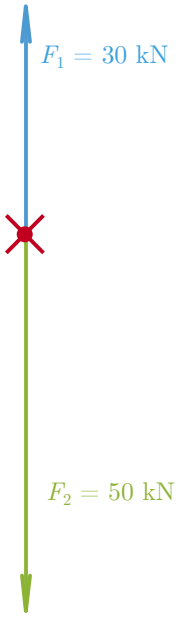


b) grafické řešení



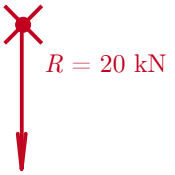
Příklad 1.2.3

Určete výslednici dvou sil o společném působišti, stejného paprsku, ale opačného smyslu o velikosti $F_1 = 50\,\mathrm{kN}$ a $F_2 = 30\,\mathrm{kN}$.

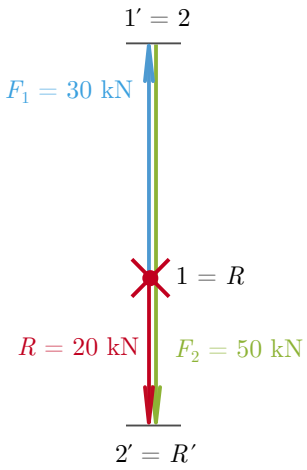


a) početní řešení

$$R = F_1 + F_2 = 50 - 30 = 20\,\mathrm{kN}$$



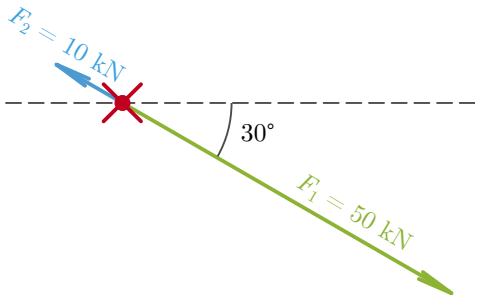
b) grafické řešení



Příklady k procvičení

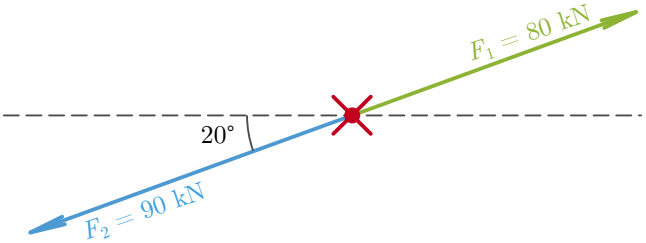
1.2.A

$F_1 = 10\,\mathrm{kN}$ a $F_2 = 50\,\mathrm{kN}$



1.2.B

$F_1 = 80\,\mathrm{kN}$ a $F_2 = 90\,\mathrm{kN}$

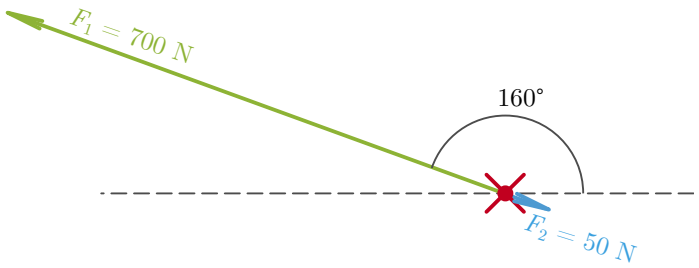


1.2.C

$F_1 = 600\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 100\,\mathrm{N}$

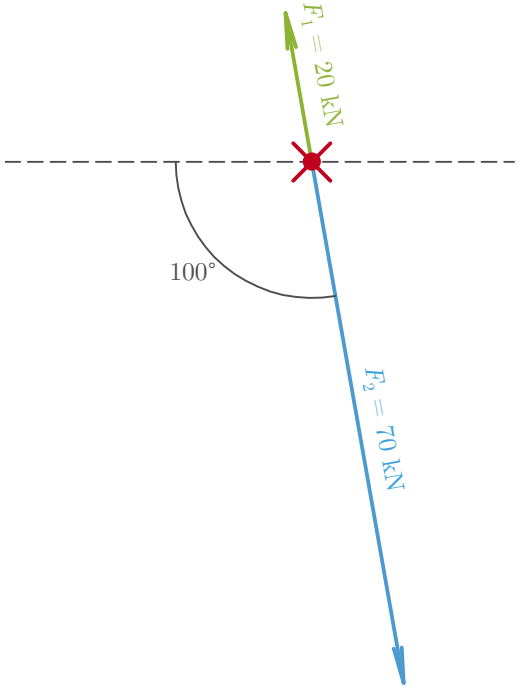
1.2.D

$F_1 = 700\,\mathrm{N}$ a $F_2 = 50\,\mathrm{N}$



1.2.E

$F_1 = 20\,\mathrm{kN}$ a $F_2 = 70\,\mathrm{kN}$



1.3 Skládání více sil působících v téže přímce se společným působištěm různého smyslu

Při skládání více sil ve stejném paprsku platí tytéž zásady jako u dvou sil ve stejném paprsku, ale různého smyslu. Je opět nutné dodržovat znaménkovou konvenci. V grafickém řešení opět využívám k získání výslednice tzv. složkové čáry, kterou jsme již lehce naznačili v minulé kapitole.

Složkovou čáru sestrojíme tak, že vynášíme v určitém pořadí a zvoleném směru jednotlivé síly. Výslednice je pak spojnicí počátku a konce složkové čáry. Pokud je složková čára uzavřena, znamená to, že výslednice je rovna nule.

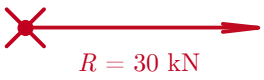
Počátek síly se označuje jejím číselným indexem $(1, 2, 3, \ldots)$, konce síly indexem s čarou $(1', 2', 3', \ldots)$.

Příklad 1.3.1

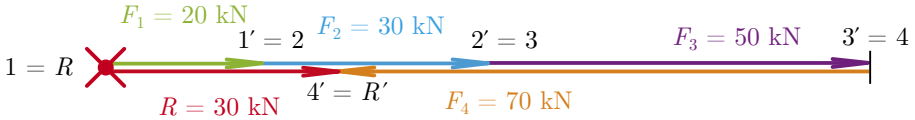
Určete výslednici sil působících v téže přímce, kde $F_1 = 20\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 30\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 50\,\mathrm{kN}$ a $F_4 = 70\,\mathrm{kN}$.

a) početní řešení

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{4} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ R &= 20 + 30 + 50 - 70 = 30\,\mathrm{kN} \end{aligned}$$

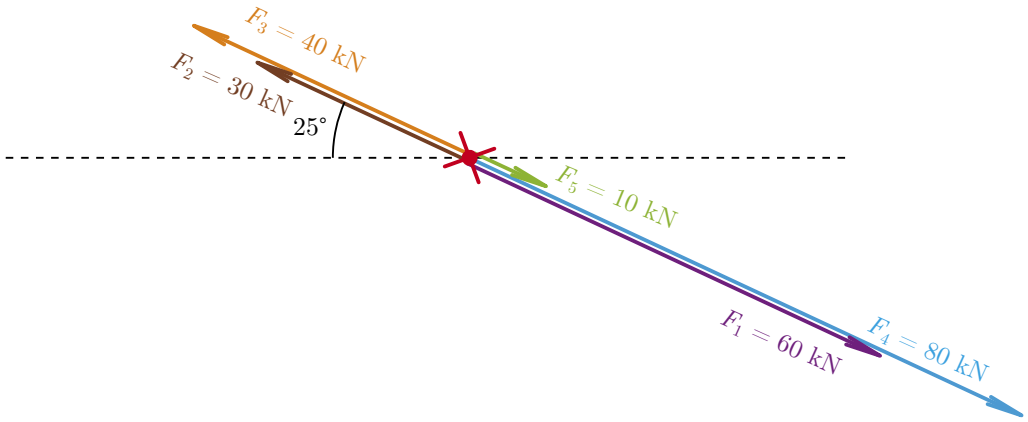


b) grafické řešení



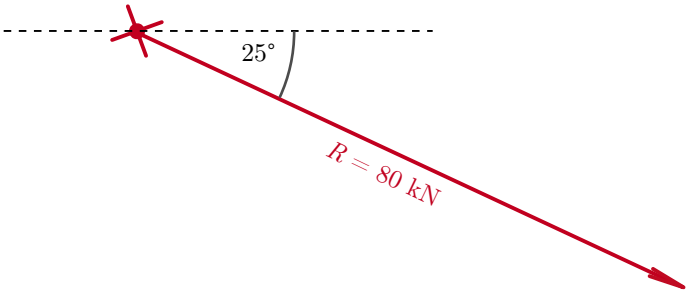
Příklad 1.3.2

Určete výslednici sil působících v téže přímce, kde $F_1 = 60\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 30\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 40\,\mathrm{kN}$, $F_4 = 80\,\mathrm{kN}$ a $F_5 = 10\,\mathrm{kN}$.

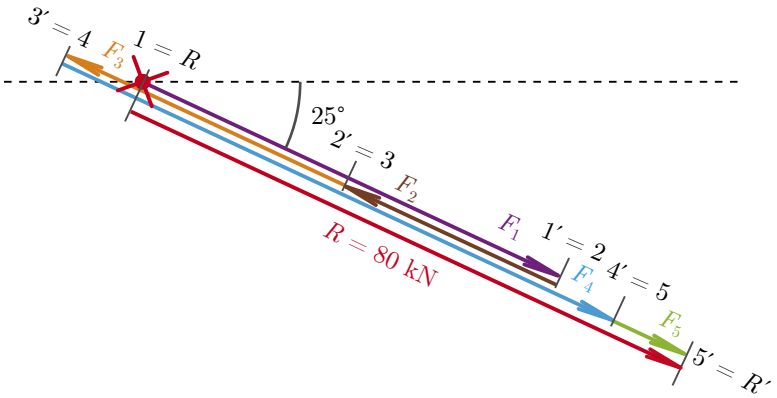


a) početní řešení

$$R = \sum_{i=1}^{5} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$$
$$R = 60 - 30 - 40 + 80 + 10 = 80\,\text{kN}$$

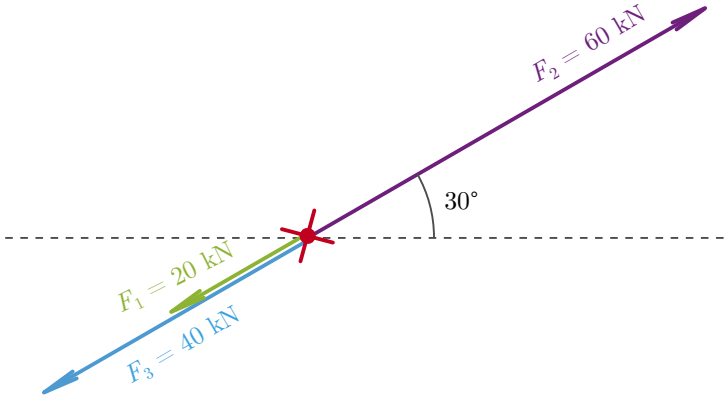


b) grafické řešení



Příklad 1.3.3

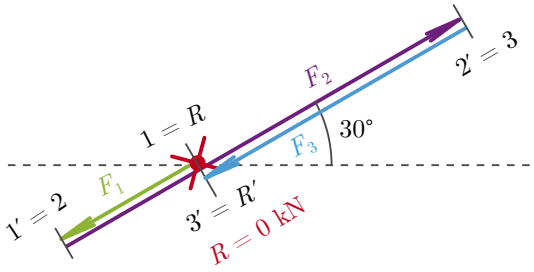
Určete výslednici sil působících v téže přímce, kde $F_1 = 20\,\text{kN}$, $F_2 = 60\,\text{kN}$ a $F_3 = 40\,\text{kN}$.



a) početní řešení

$$R = \sum_{i=1}^{3} F_i = F_1 + F_2 + F_3$$
$$R = -20 + 60 - 40 = 0\,\text{kN}$$

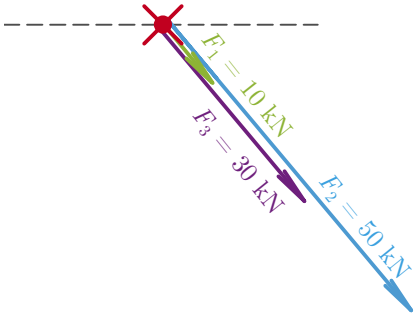
b) graficky



Příklady k procvičení

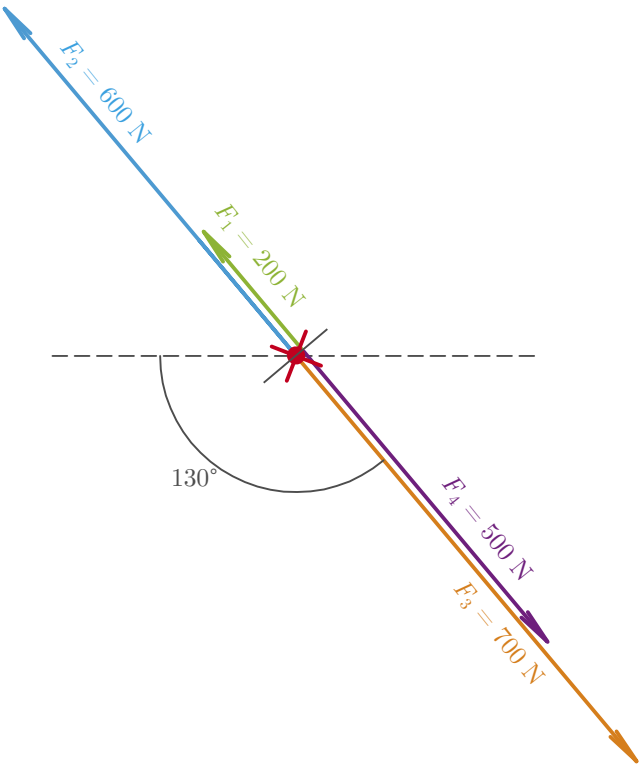
1.3.A

$F_1 = 10\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 50\,\mathrm{kN}$ a $F_3 = 30\,\mathrm{kN}$



1.3.B

$F_1 = 200\,\mathrm{N}$, $F_2 = 600\,\mathrm{N}$, $F_3 = 700\,\mathrm{N}$ a $F_4 = 500\,\mathrm{N}$

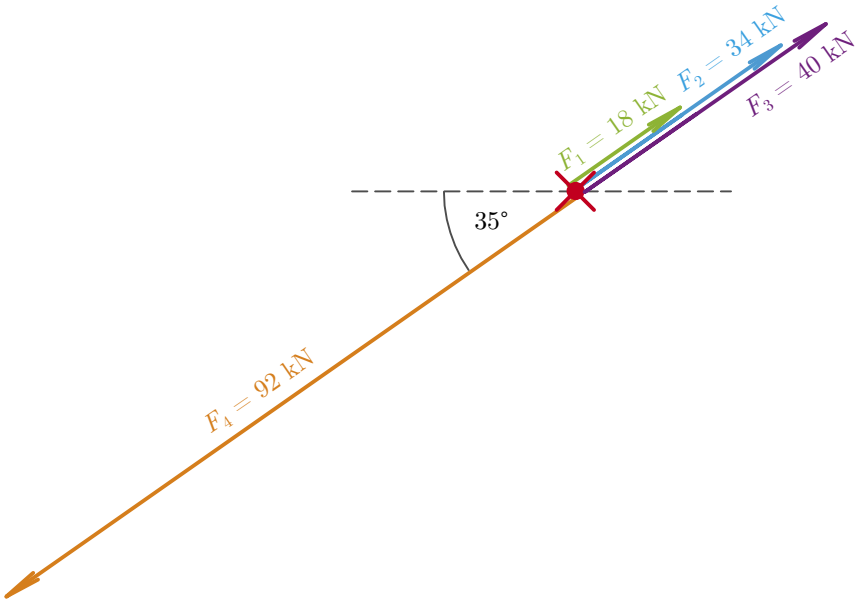


1.3.C

$F_1 = 80\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 100\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 90\,\mathrm{kN}$, $F_4 = 10\,\mathrm{kN}$ a $F_5 = 25\,\mathrm{kN}$

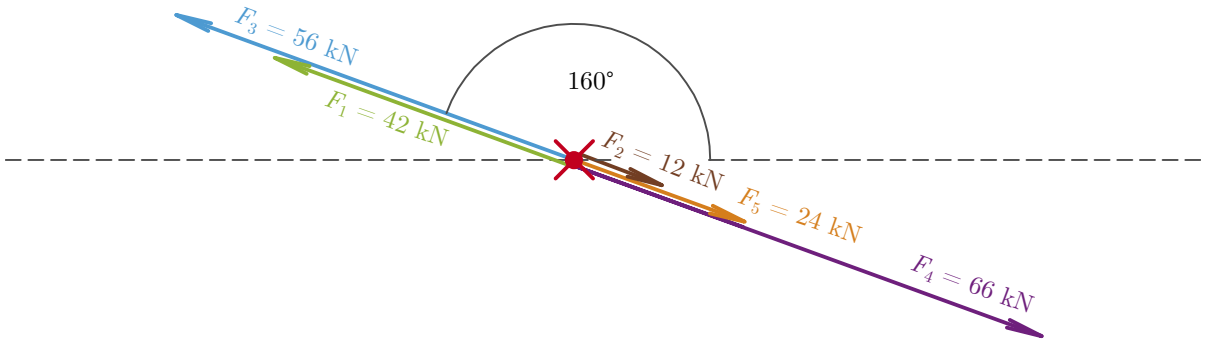
1.3.D

$F_1 = 18\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 34\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 40\,\mathrm{kN}$ a $F_4 = 92\,\mathrm{kN}$



1.3.E

$F_1 = 42\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 12\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 56\,\mathrm{kN}$, $F_4 = 66\,\mathrm{kN}$ a $F_5 = 24\,\mathrm{kN}$



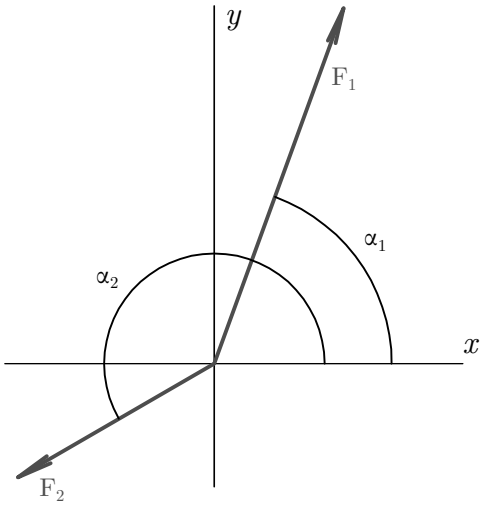
2 Centrické síly

2.1 Dvě síly různých směrů o společném působišti (dvě centrické síly)

Jestliže působí na těleso dvě síly různých směrů, pak se účinek těchto sil na tělese projeví výslednicí R, jejíž velikost a směr jsou určeny úhlopříčkou rovnoběžníku jehož strany tvoří síly F_1 a F_2.

Dvě síly, jejíž výslednici zjišťujeme, jsou opět zadávány ve vztahu k jednotkové kružnici a to tak, že průsečík os x a y je společným působištěm těchto sil a úhly α_1 a α_2, kterými jsou zadávány směry sil, jsou vždy úhly vztahující se od kladné osy x a jsou vedeny proti směru hodinových ručiček.

Např.



Jako vždy i zde lze síly skládat základními dvěma způsoby – početně nebo graficky.

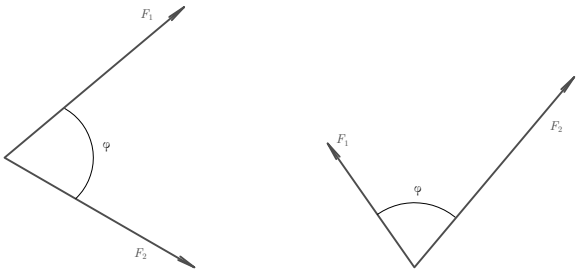
A) početní řešení

A1) pomocí Cosinové věty, kde velikost výslednice získáváme pomocí vztahu:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \varphi)}$$

, kde φ je menší z úhlů, které svírají síly mezi sebou a $\pi\,\mathrm{rad} = 180°$.

např.

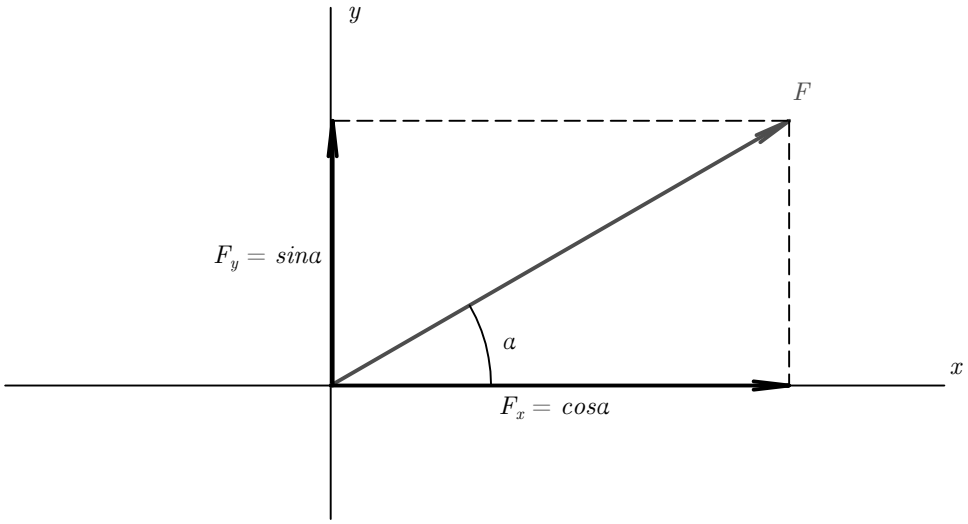


Toto řešení je rychlé a přesné, ale bez náčrtku nelze určit úhel výslednice.

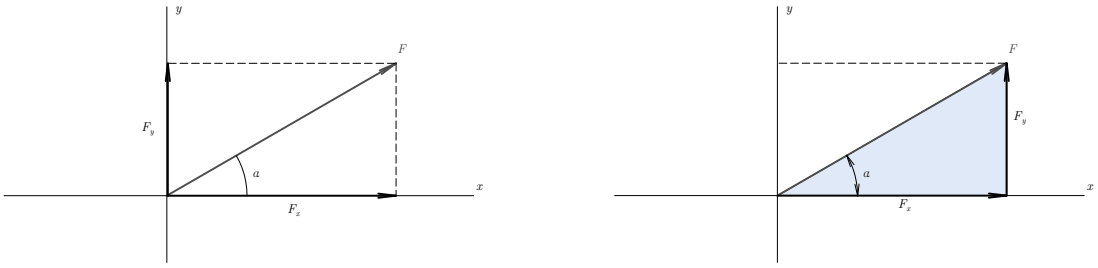
A2) pomocí rozkladu sil na složky x a y a následného složení těchto dílčích složek do výslednice.

Zde je nutné si uvědomit, že každou sílu si mohu rozložit na dvě její části. Praktické je využívat k tomuto rozkladu do os x a y.

Například síla F:



Zároveň platí, že výslednicí sil F_x a F_y je síla F (z rovnoběžníku sil). Tzn., že pokud známe složky F_x a F_y, můžeme zpětně určit sílu F.



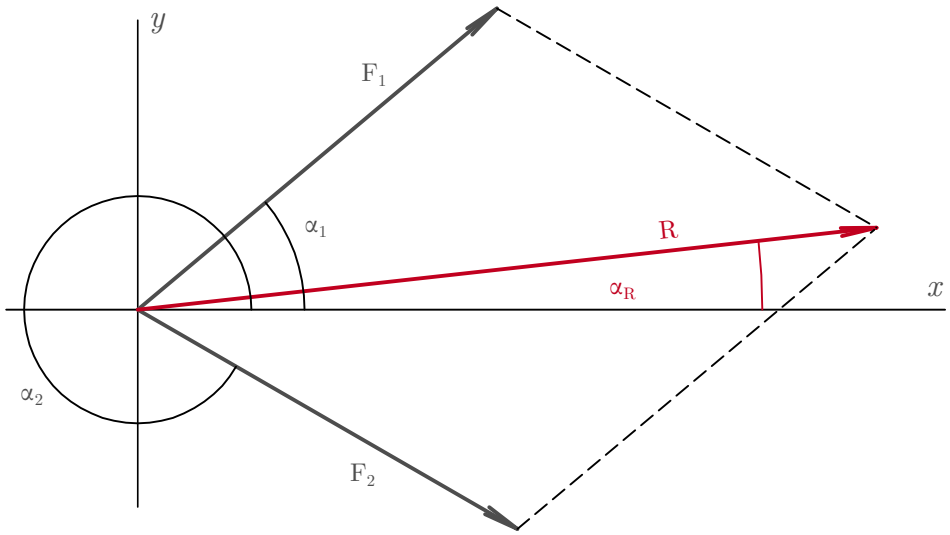
Lze využít Pythagorovy věty i goniometrických funkcí:

$$\begin{aligned} F^2 &= F_x^2 + F_y^2 \\ F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \end{aligned}$$

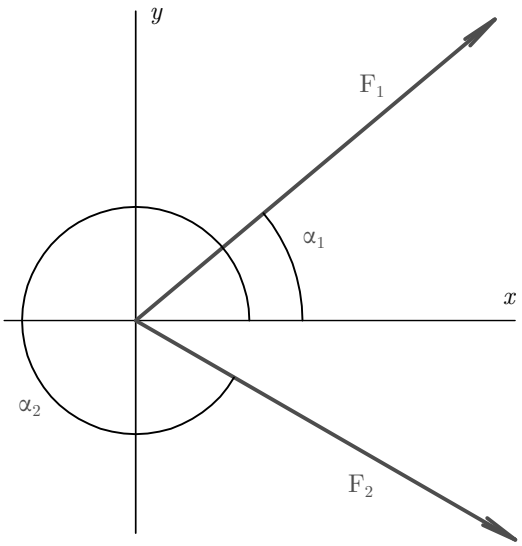
$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

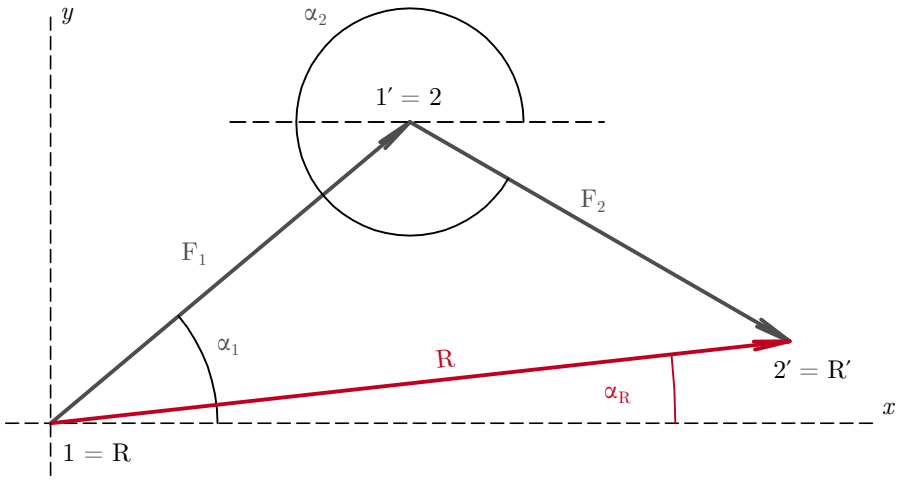
B) grafické řešení

B1) rovnoběžník sil



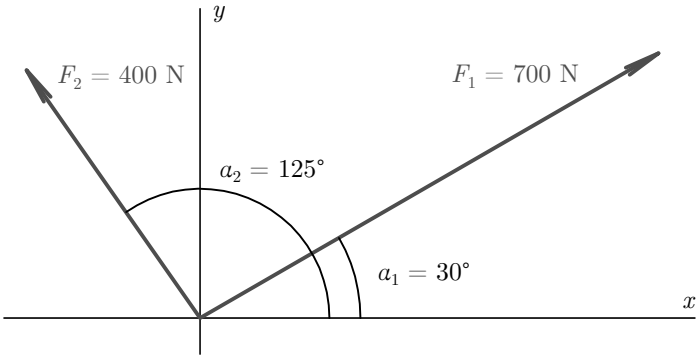
B2) složková čára – princip již známe z předchozí kapitoly. Je nutné striktně dodržovat nejen velikosti, ale i zadané směry sil.





Příklad 2.1.1

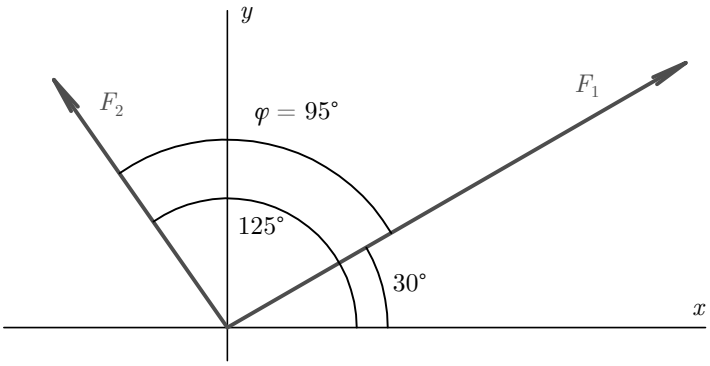
Určete výslednici těchto sil: $F_1 = 700\,\mathrm{N}$, $\alpha_1 = 30°$, $F_2 = 400\,\mathrm{N}$, $\alpha_2 = 125°$



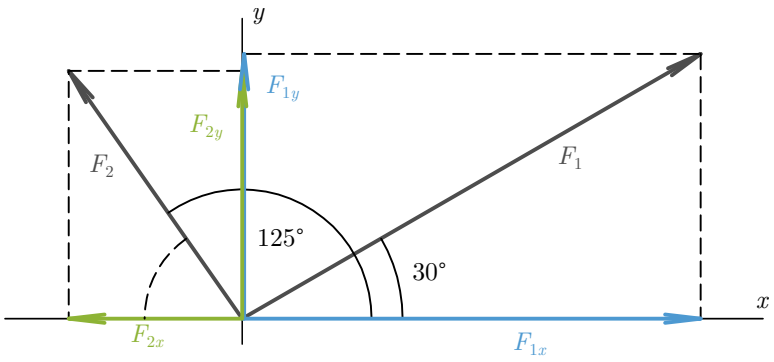
Početní řešení:

a) Cosinova věta

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \varphi)} \\ R &= \sqrt{700^2 + 400^2 - 2 \cdot 700 \cdot 400 \cdot \cos(180° - 95°)} = 775,37\,\mathrm{N} \end{aligned}$$



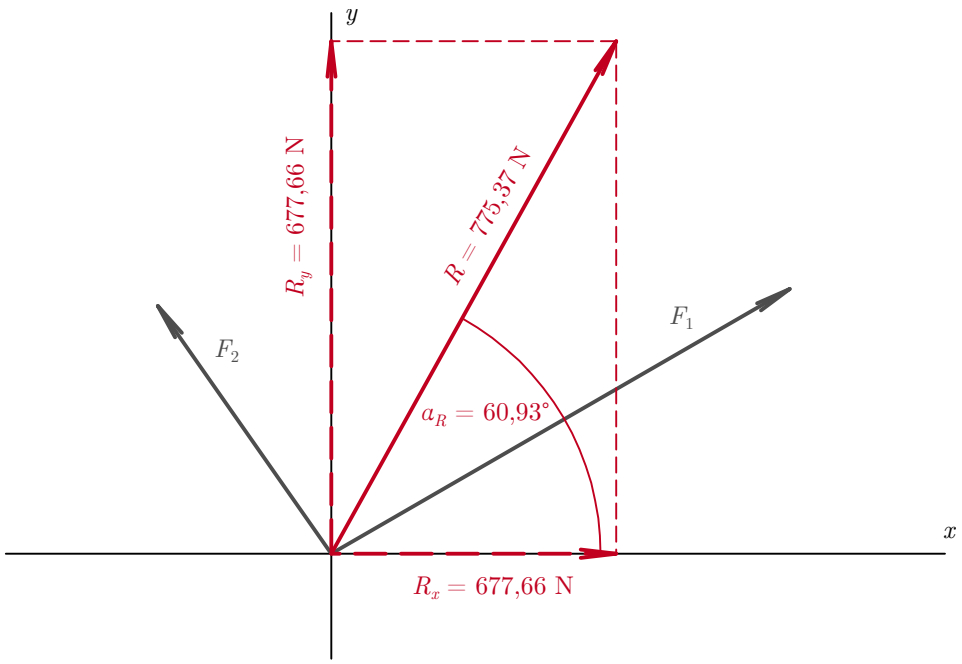
b) rozkladem sil



$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_1\cos 30° = 700\cos 30° = 606,22\,\mathrm{N} \\ F_{1y} &= F_1\sin 30° = 700\sin 30° = 350\,\mathrm{N} \\ F_{2x} &= F_2\cos 55° = 400\cos 55° = 229,43\,\mathrm{N} \\ F_{2y} &= F_2\sin 55° = 400\sin 55° = 327,66\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

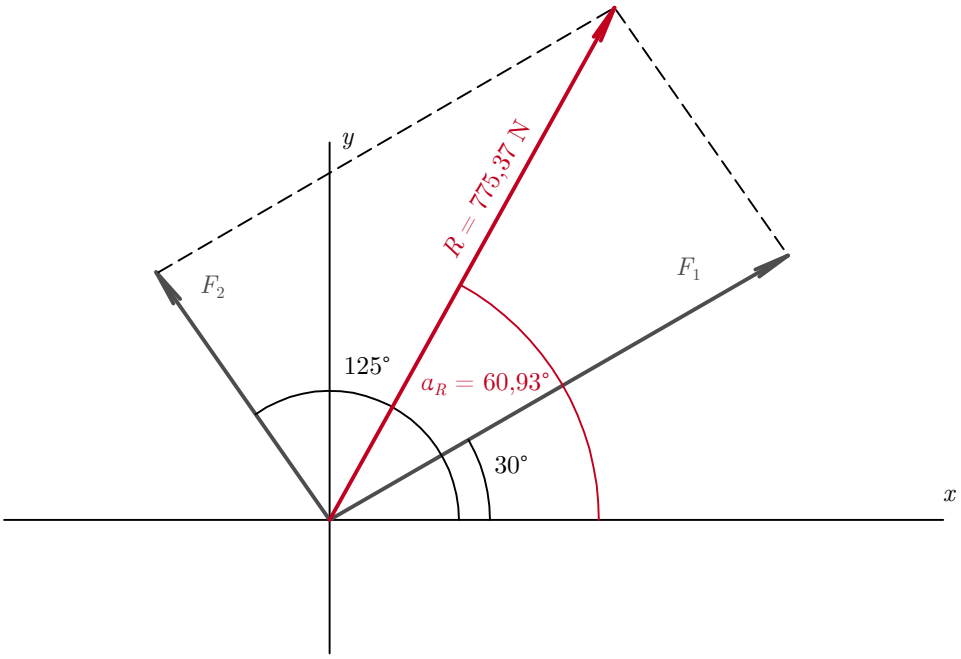
$$\begin{aligned} R_x = F_{1x} + F_{2x} &= 606,22 - 229,43 = 376,79\,\mathrm{N} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} &= 350 + 327,66 = 677,66\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{376,79^2 + 677,66^2} = 775,37\,\mathrm{N} \\
\tan \alpha_R &= \frac{R_y}{R_x} = \frac{677,66}{376,79} = 1,7985 \\
\alpha_R &= 60,93^\circ
\end{aligned}
$$

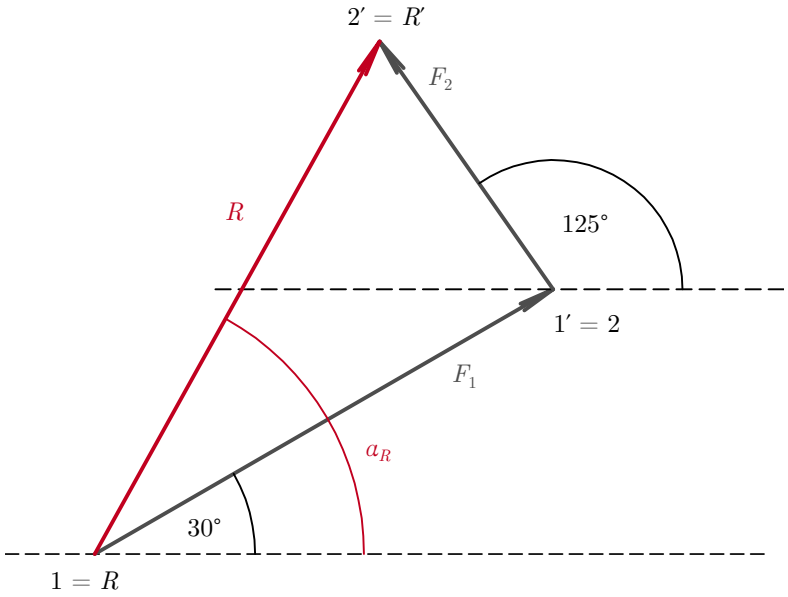


Grafické řešení

a) rovnoběžník sil

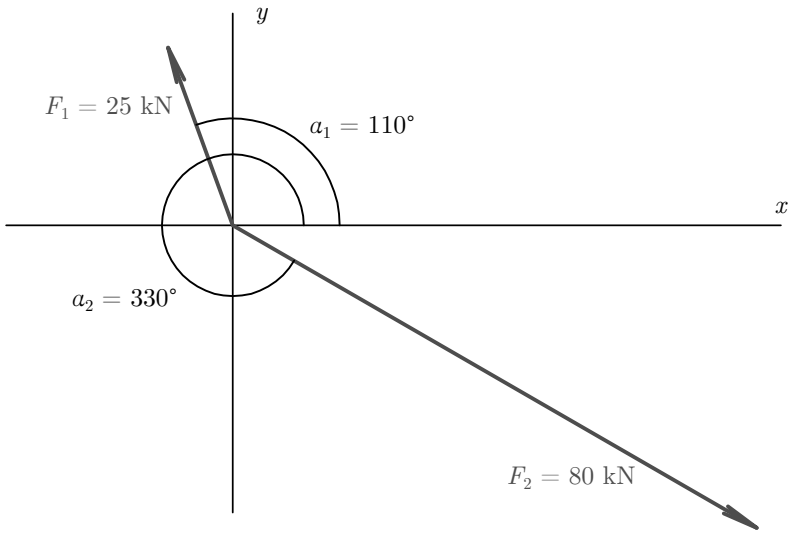


b) složkovou čarou



Příklad 2.1.2

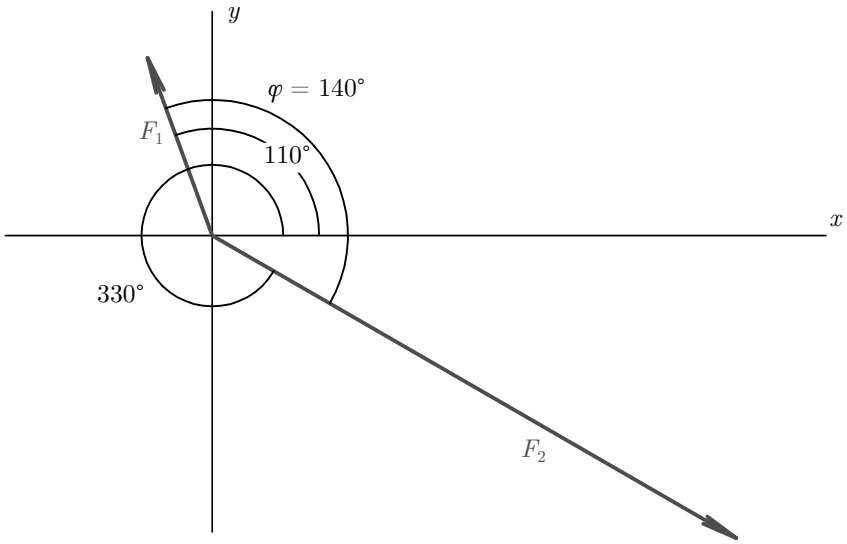
$F_1 = 25\,\text{kN}$, $\alpha_1 = 110°$, $F_2 = 80\,\text{kN}$, $\alpha_2 = 330°$



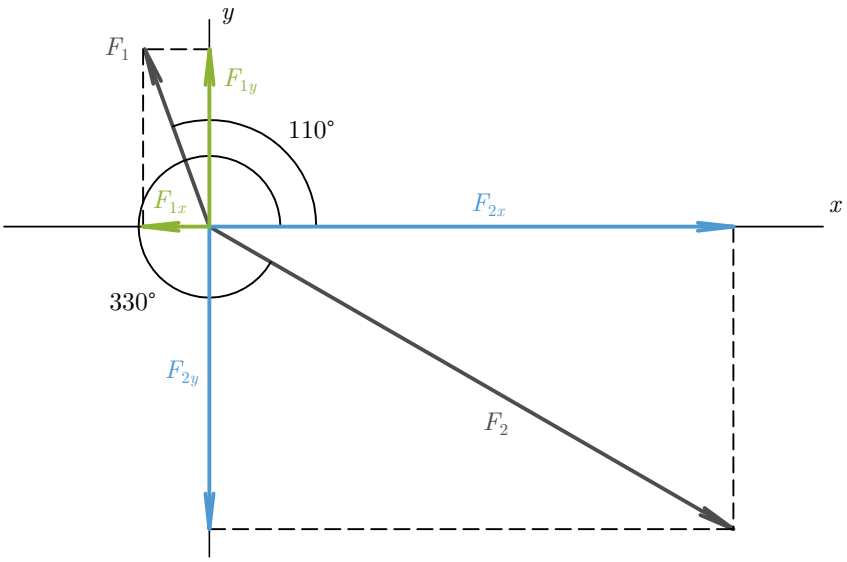
Početní řešení:

a) Cosinova věta

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \varphi)}$$
$$R = \sqrt{25^2 + 80^2 - 2 \cdot 25 \cdot 80 \cdot \cos(180° - 140°)} = 62,94\,\text{kN}$$



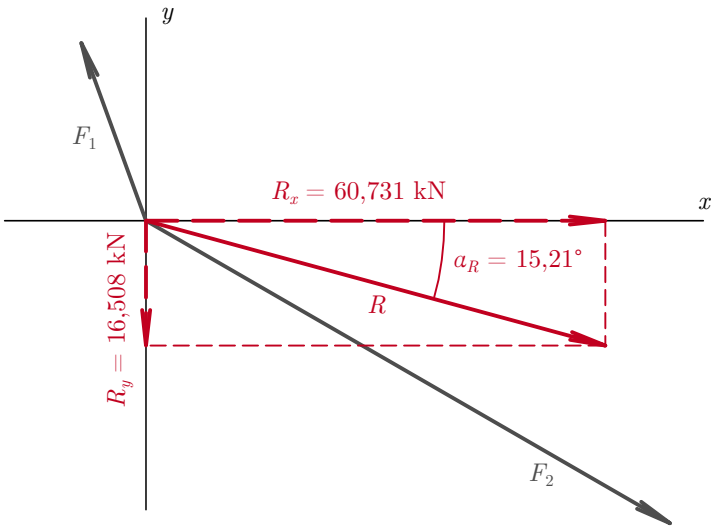
b) rozkladem



$$
\begin{aligned}
F_{1x} &= F_1 \cos 70^\circ = 25 \cos 70^\circ = 8,551\,\text{kN} \\
F_{1y} &= F_1 \sin 70^\circ = 25 \sin 70^\circ = 30,492\,\text{kN} \\
F_{2x} &= F_2 \cos 30^\circ = 80 \cos 30^\circ = 69,282\,\text{kN} \\
F_{2y} &= F_2 \sin 30^\circ = 80 \sin 30^\circ = 40\,\text{kN}
\end{aligned}
$$

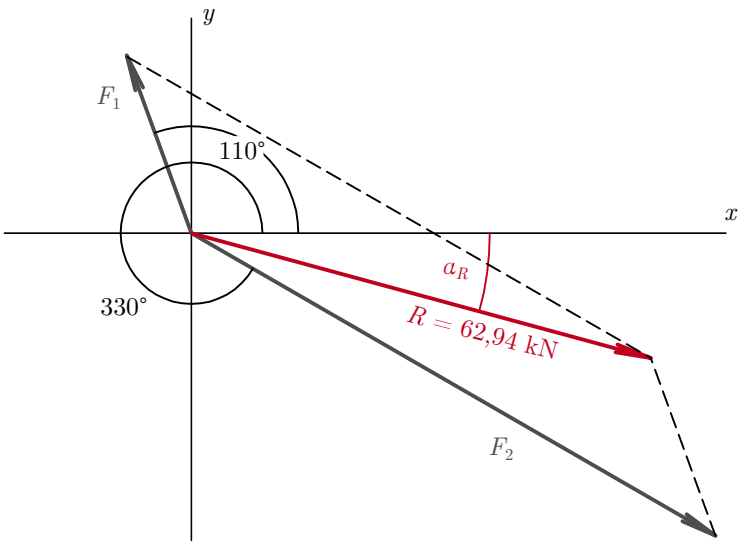
$$
\begin{aligned}
R_x = F_{1x} + F_{2x} &= -8,551 + 69,282 = 60,731\,\text{kN} \\
R_y = F_{1y} + F_{2y} &= 23,492 - 40 = -16,508\,\text{kN}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{60,731^2 + (-16,508)^2} = 62,94\,\text{kN} \\
\tan \alpha_R &= \frac{R_y}{R_x} = \frac{-16,508}{60,731} = -0,27182 \\
\alpha_R &= -15,21^\circ
\end{aligned}
$$

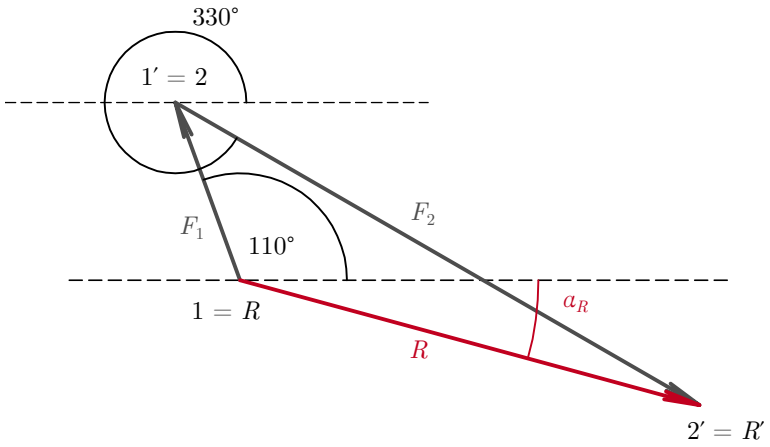


Grafické řešení:

a) rovnoběžník sil



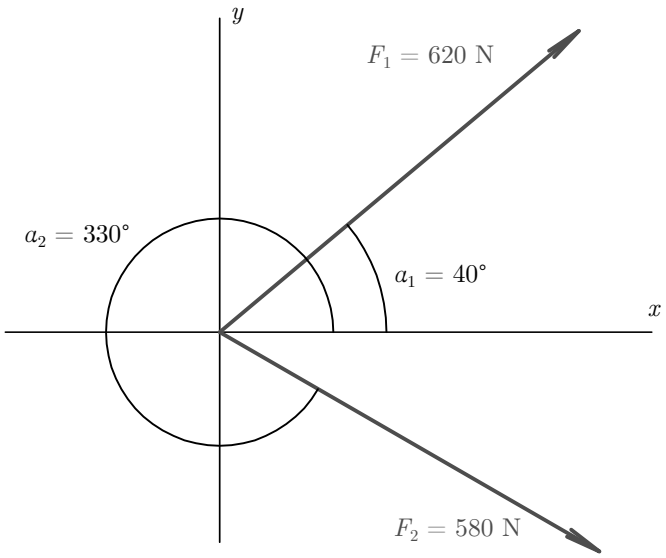
b) složkovou čarou



Příklady k procvičení

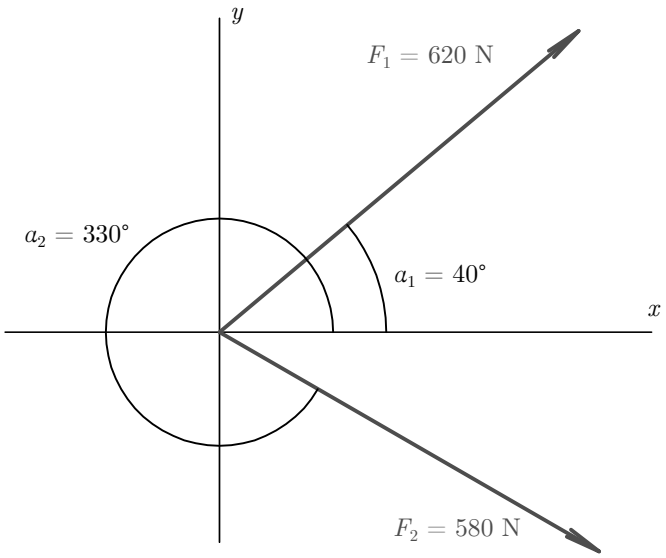
2.1.A

$F_1 = 620\,\mathrm{N}$, $\alpha_1 = 40°$, $F_2 = 580\,\mathrm{N}$, $\alpha_2 = 330°$



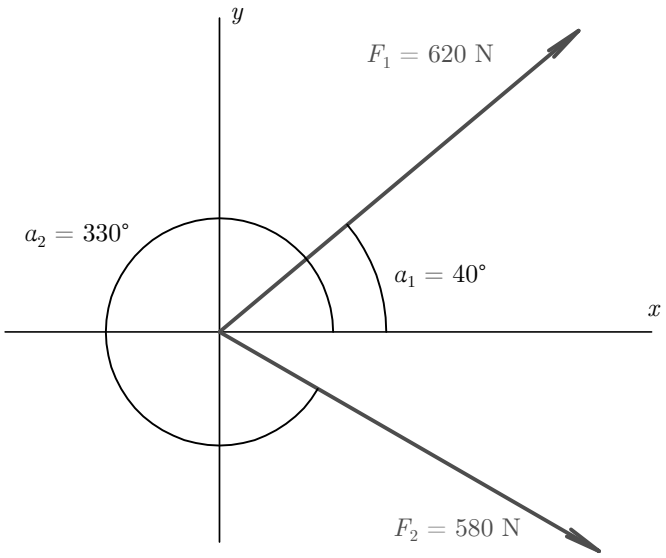
2.1.B

$F_1 = 450\,\mathrm{N}$, $\alpha_1 = 45°$, $F_2 = 500\,\mathrm{N}$, $\alpha_2 = 130°$



2.1.C

$F_1 = 500\,\mathrm{N}$, $\alpha_1 = 70°$, $F_2 = 300\,\mathrm{N}$, $\alpha_2 = 210°$



2.2 Více sil o společném působišti různých směrů (více centrických sil)

Pro určení výslednice takové soustavy sil lze použít stejná pravidla jako u dvou centrických sil.

Lze použít obě grafické metody pro určení výslednice soustavy sil, ale z početních metod využíváme princip rozkladu sil, protože využití Cosinovy věty je příliš pracné.

Pro početní řešení tedy platí, že vodorovná složka výslednice R_x je součtem všech vodorovných složek jednotlivých sil F_{ix}. Analogicky platí, že svislá složka výslednice R_y je součtem všech svislých složek jednotlivých sil F_{iy}.

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + \cdots + F_n \cos\alpha_n \\ R_y &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + \cdots + F_n \sin\alpha_n \end{aligned}$$

Přičemž respektujeme při dosazování zadané úhly od osy x, abychom správně určili výslednou orientaci složek R_x a R_y.

Pro konečnou hodnotu výslednice se nic nemění, platí:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Také pro výsledný úhel, který svírá výslednice s osou x, lze opět využít goniometrické funkce, např.

$$\tan\alpha_R = \frac{R_y}{R_x}$$

nebo

$$\sin\alpha_R = \frac{R_y}{R}$$

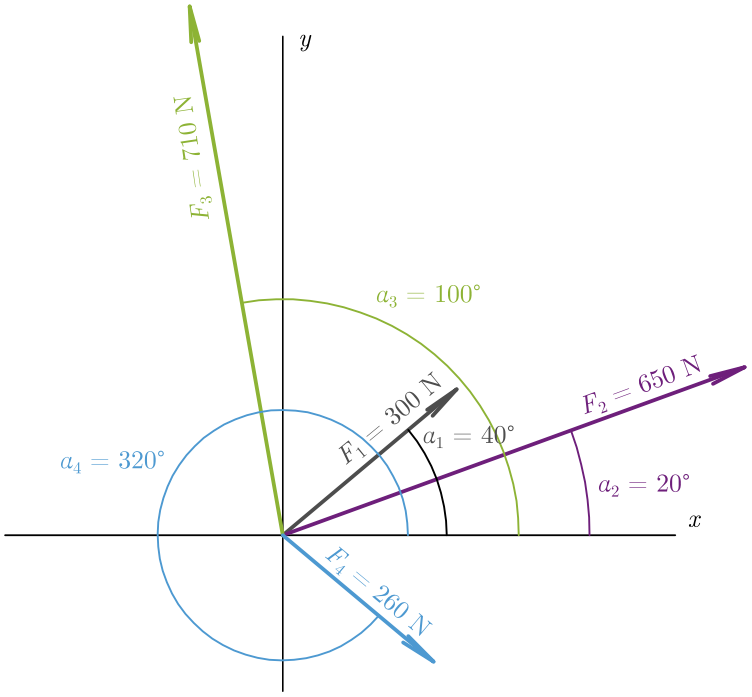
apod.

U grafické metody pomocí rovnoběžníku sil pracujeme postupně. Nejprve uděláme výslednici sil F_1 a F_2 a pomocí rovnoběžníku určíme jejich výslednici R_{12}. Potom určíme výslednici sil R_{12} a F_3 a dostaneme výslednici R_{123}. Dále najdeme výslednici síly R_{123} a F_4. A tak pokračujeme dále. Poslední výslednici celé soustavy sil označíme R.

U grafické metody pomocí složkové čáry platí vše, co jsme si již řekli. Znovu upozorňuji, že je nutné dodržovat přesně nejen velikost, ale i směr síly.

Příklad 2.2.1

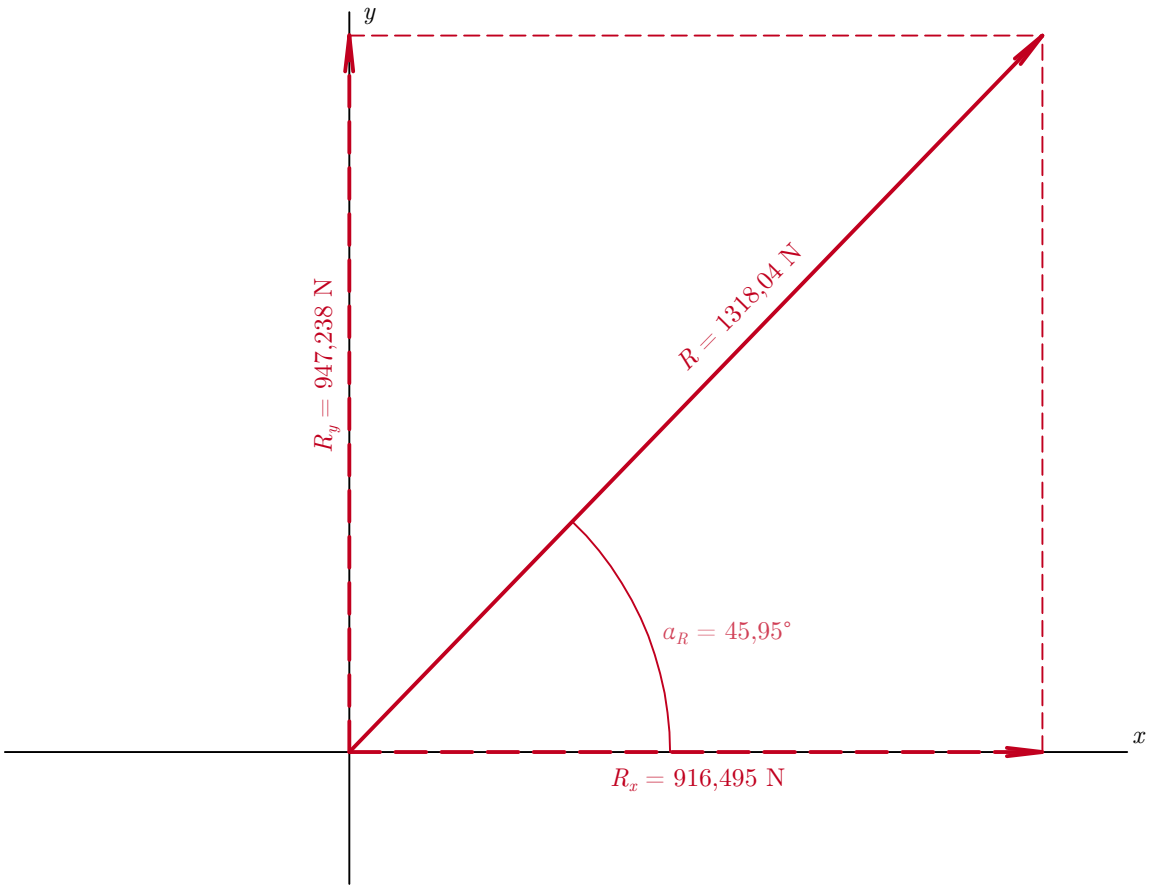
$F_1 = 300\,\mathrm{N}$, $\alpha_1 = 40°$, $F_2 = 650\,\mathrm{N}$, $\alpha_2 = 20°$, $F_3 = 710\,\mathrm{N}$, $\alpha_3 = 100°$, $F_4 = 260\,\mathrm{N}$, $\alpha_4 = 320°$.



Početní řešení:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{4} F_{ix} = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 + F_4 \cos\alpha_4 \\ R_x &= 300\cos 40° + 650\cos 20° + 710\cos 100° + 260\cos 320° \\ R_x &= 916,495\,\mathrm{N} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= \sum_{i=1}^{4} F_{iy} = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 + F_4 \sin\alpha_4 \\ R_y &= 300\sin 40° + 650\sin 20° + 710\sin 100° + 260\sin 320° \\ R_y &= 947,238\,\mathrm{N} \uparrow \end{aligned}$$

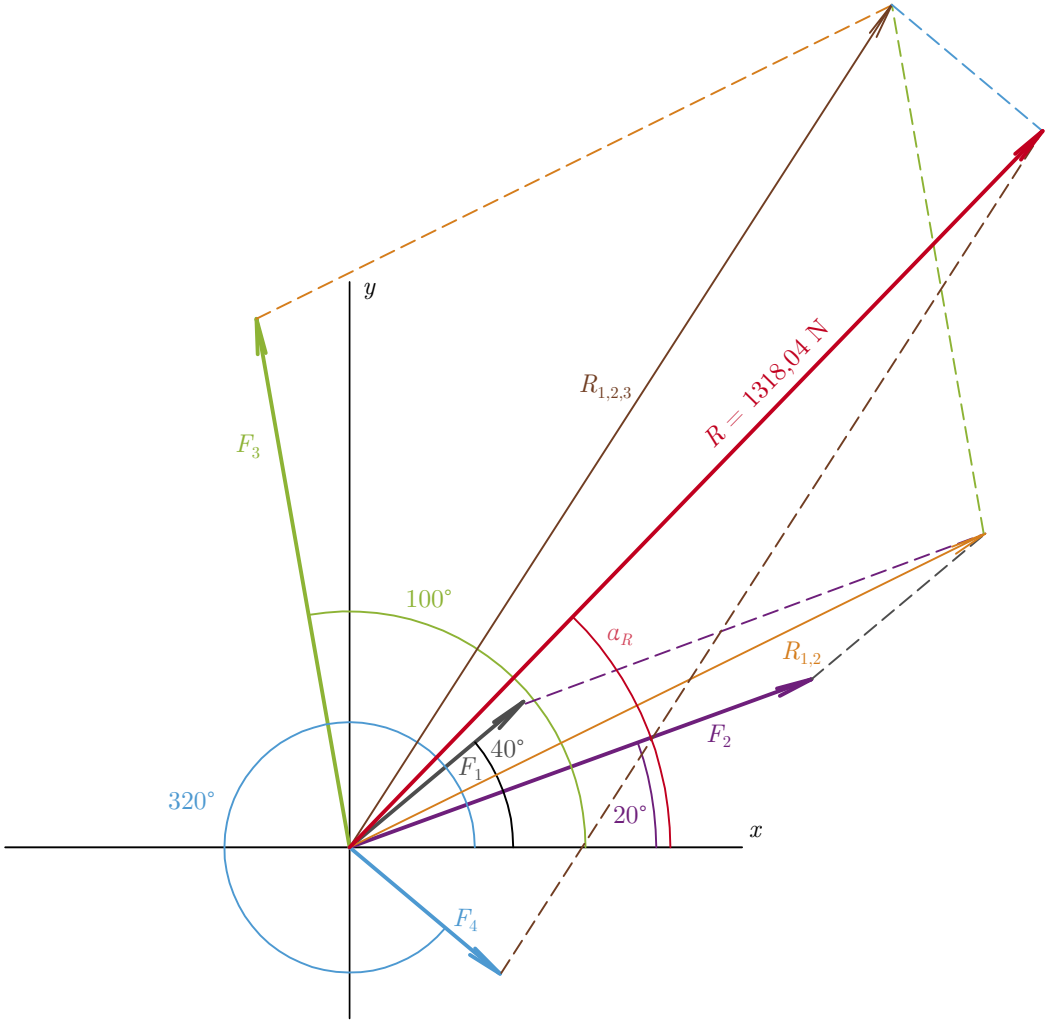


$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$R = \sqrt{916,495^2 + 947,238^2} = 1318,04\,\text{N}$$

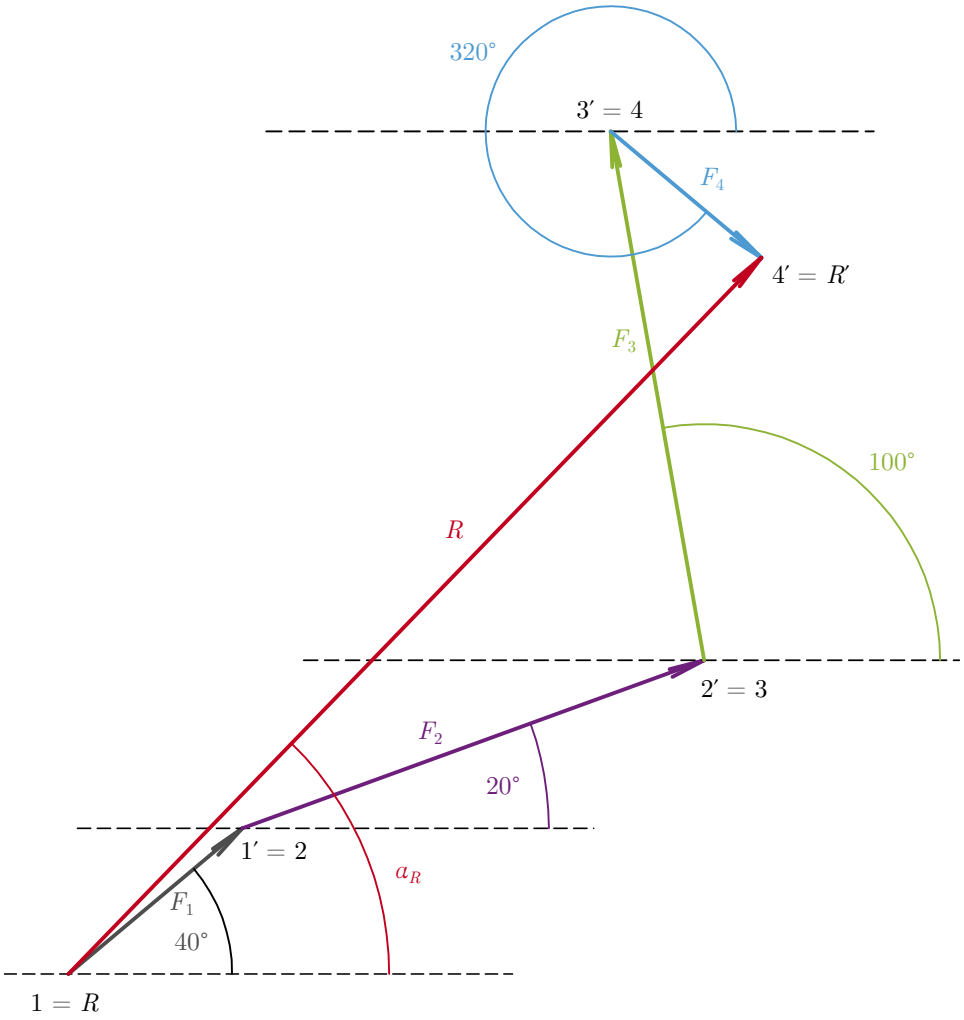
$$\tan\alpha_R = \frac{R_y}{R_x}$$
$$\tan\alpha_R = \frac{947,238}{916,495} = 1,0335$$
$$\alpha_R = 45,95°$$

Grafické řešení:

a) rovnoběžník sil

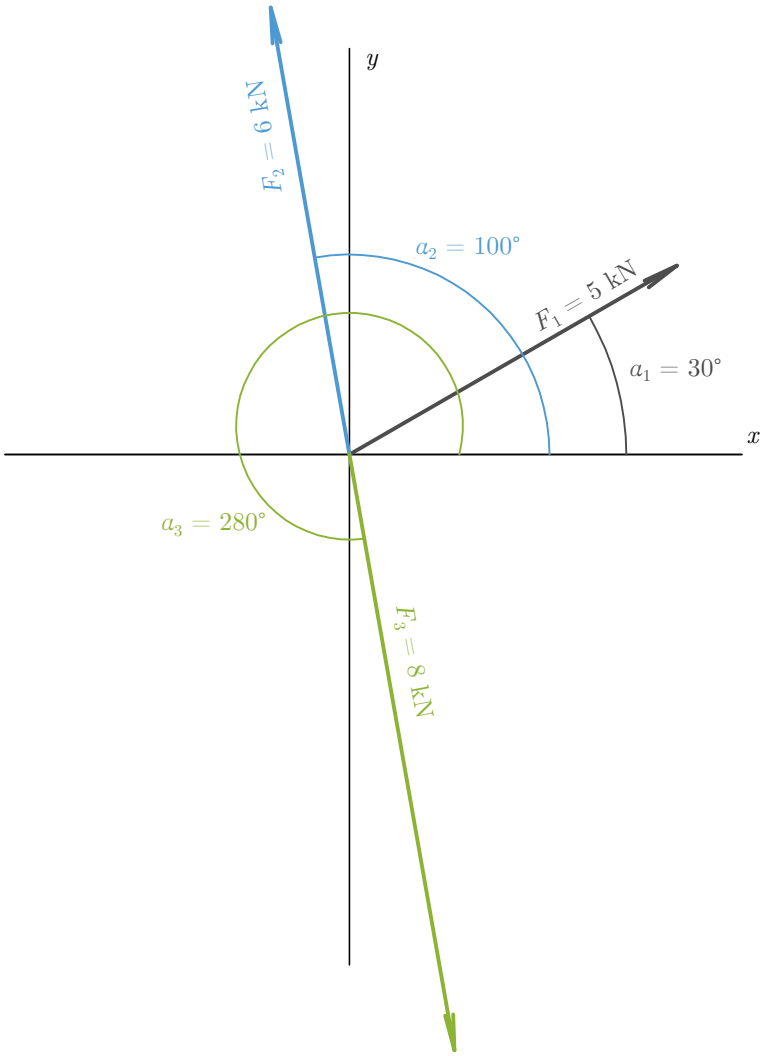


b) složková čára



Příklad 2.2.2

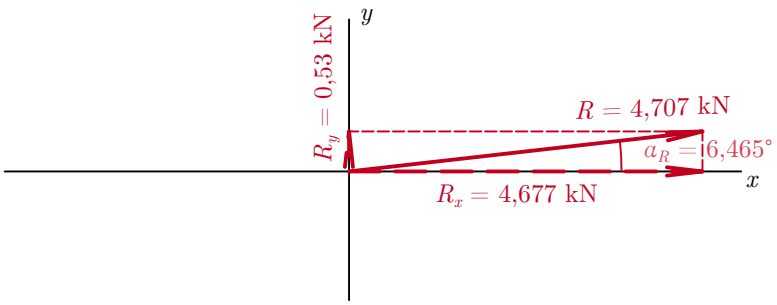
$F_1 = 5\,\text{kN}$, $\alpha_1 = 30°$, $F_2 = 6\,\text{kN}$, $\alpha_2 = 100°$, $F_3 = 8\,\text{kN}$, $\alpha_3 = 280°$



Početní řešení:

$$
\begin{aligned}
R_x &= \sum_{i=1}^{3} F_{ix} = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 \\
R_x &= 5\cos 30° + 6\cos 100° + 8\cos 280° \\
R_x &= 4,677\,\text{kN} \rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_y &= \sum_{i=1}^{3} F_{iy} = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 \\
R_y &= 5 \sin 30^\circ + 6 \sin 100^\circ + 8 \sin 280^\circ \\
R_y &= 0,53\,\text{kN} \uparrow
\end{aligned}
$$

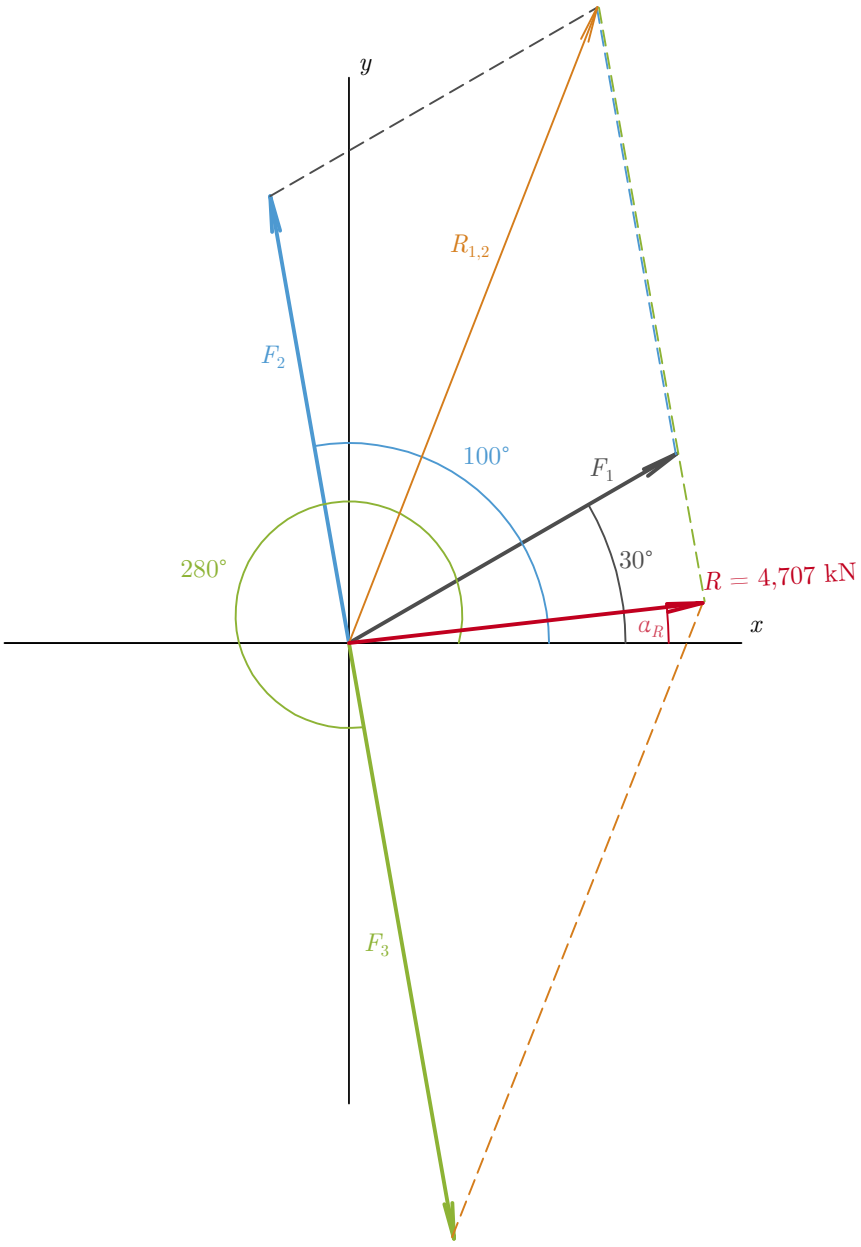


$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\
R &= \sqrt{4,677^2 + 0,53^2} = 4,707\,\text{kN}
\end{aligned}
$$

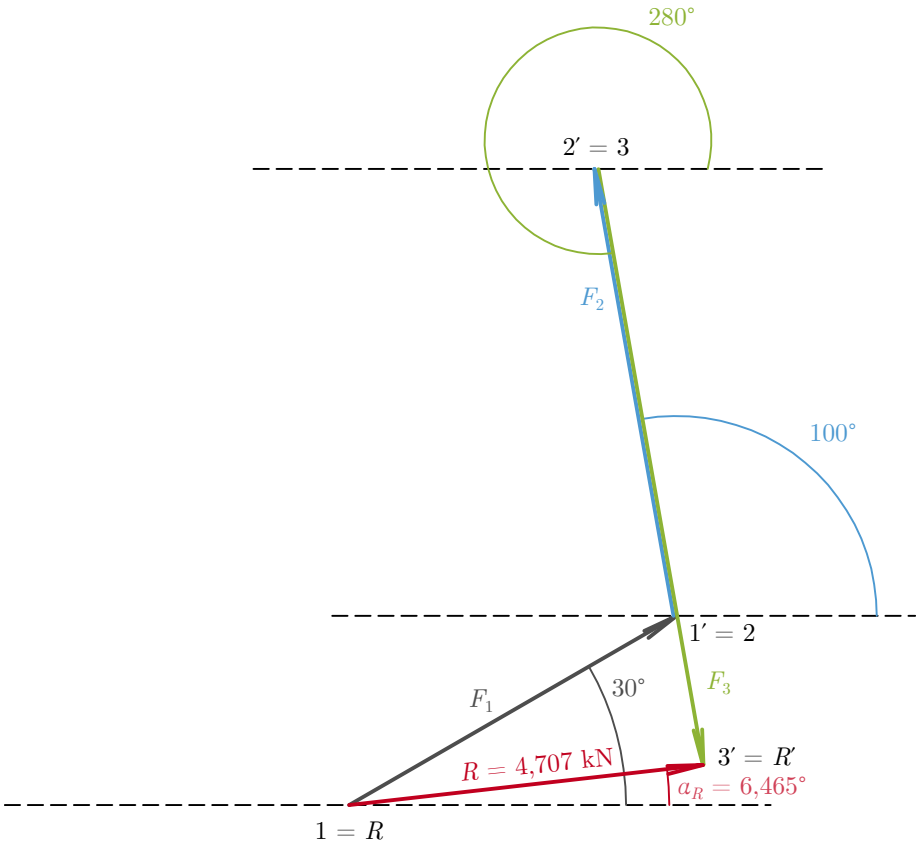
$$
\begin{aligned}
\tan\alpha_R &= \frac{R_y}{R_x} \\
\tan\alpha_R &= \frac{0,53}{4,677} = 0,1133 \\
\alpha_R &= 6,465^\circ
\end{aligned}
$$

Grafické řešení:

a) rovnoběžník sil

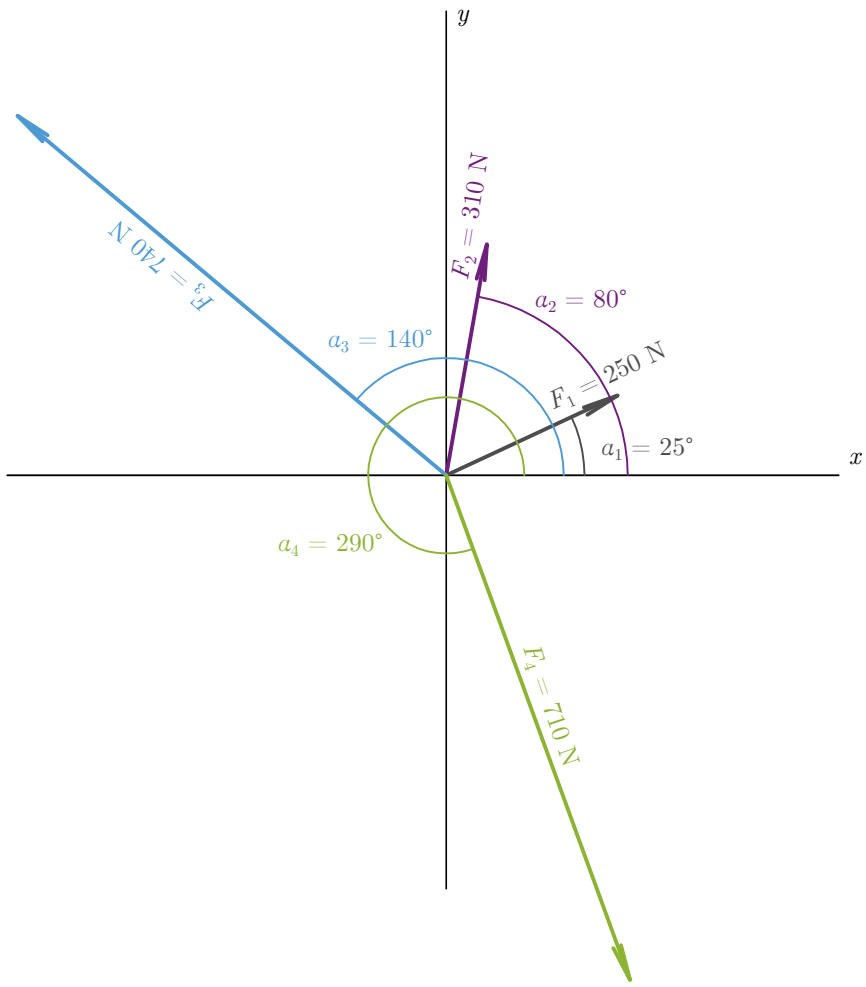


b) složková čára



Příklad 2.2.3

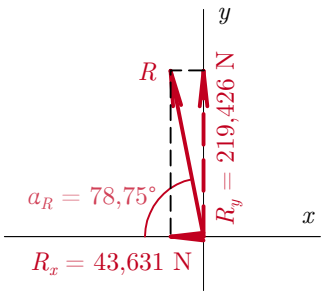
$F_1 = 250\,\mathrm{N}$, $\alpha_1 = 25°$, $F_2 = 310\,\mathrm{N}$, $\alpha_2 = 80°$, $F_3 = 740\,\mathrm{N}$, $\alpha_3 = 140°$, $F_4 = 710\,\mathrm{N}$, $\alpha_4 = 290°$.



Početní řešení:

$$
\begin{aligned}
R_x &= \sum_{i=1}^{4} F_{ix} = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 + F_4 \cos\alpha_4 \\
R_x &= 250 \cos 25° + 310 \cos 80° + 740 \cos 140° + 710 \cos 290° \\
R_x &= -43,631\,\mathrm{N} \leftarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_y &= \sum_{i=1}^{4} F_{iy} = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 + F_4 \sin\alpha_4 \\
R_y &= 250\sin 25^\circ + 310\sin 80^\circ + 740\sin 140^\circ + 710\sin 290^\circ \\
R_y &= 219,426\,\mathrm{N} \uparrow
\end{aligned}
$$

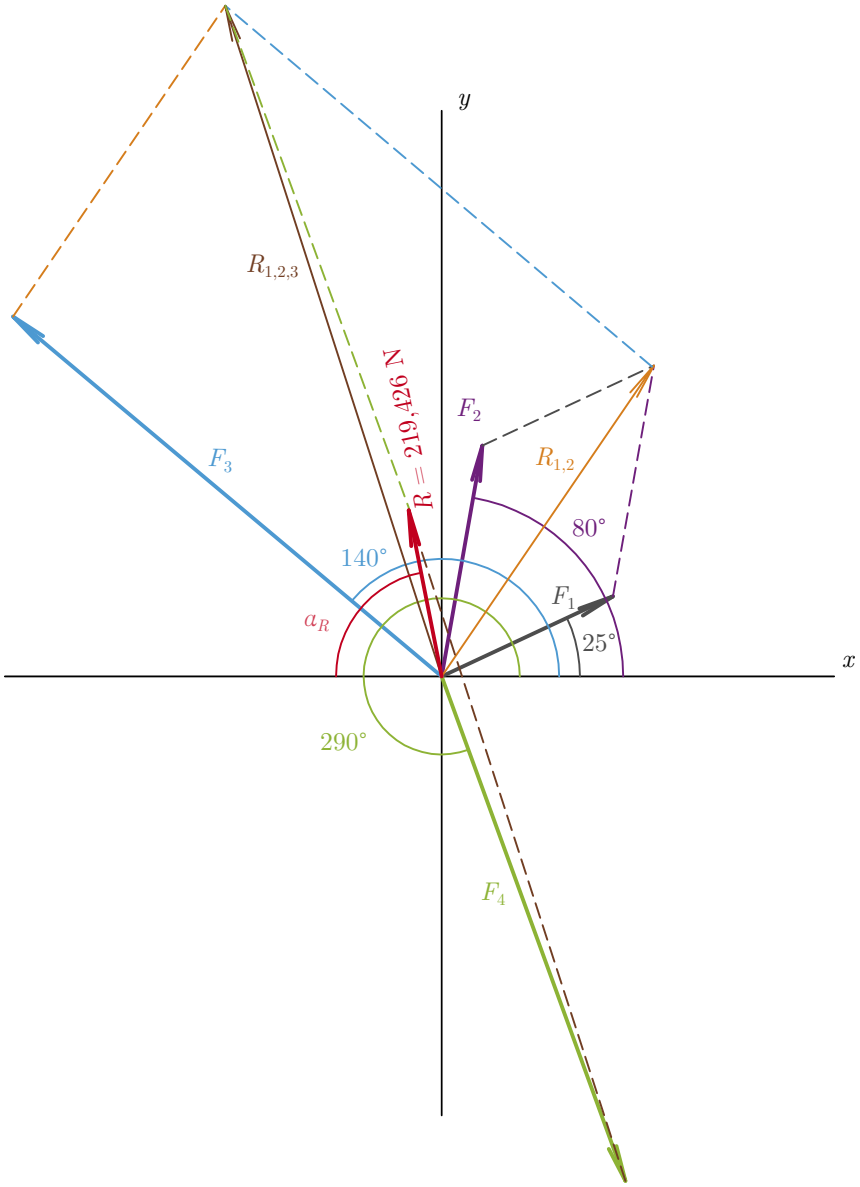


$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\
R &= \sqrt{(-43,631)^2 + 219,426^2} = 223,722\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

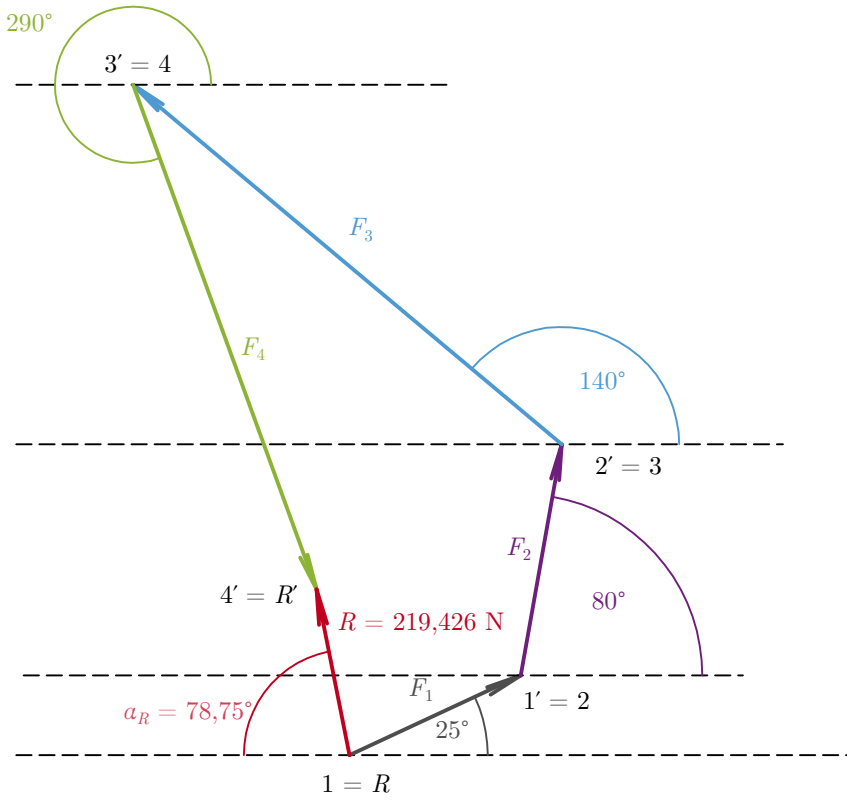
$$
\begin{aligned}
\tan\alpha_R &= \frac{R_y}{R_x} \\
\tan\alpha_R &= \frac{219,426}{-43,631} = -5,029 \\
\alpha_R &= -78,75^\circ
\end{aligned}
$$

Grafické řešení:

a) rovnoběžník sil



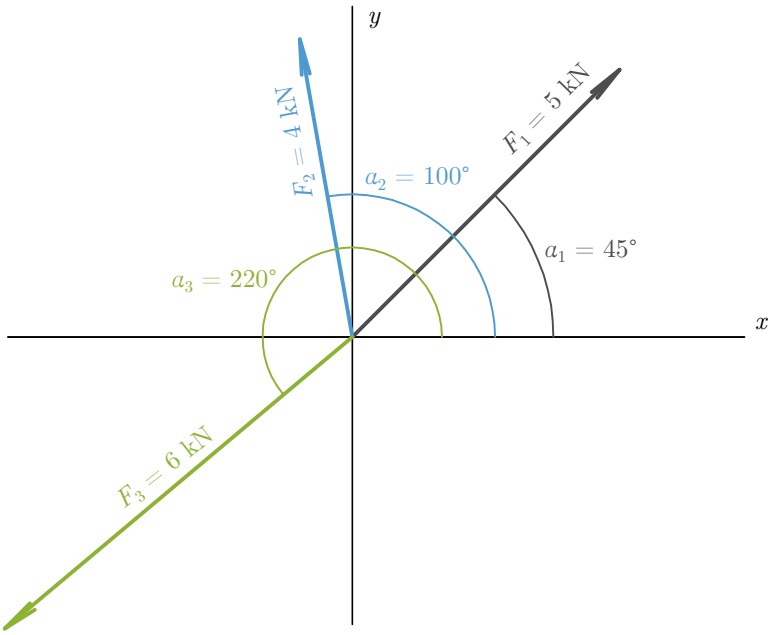
b) složková čára



Příklady k procvičení

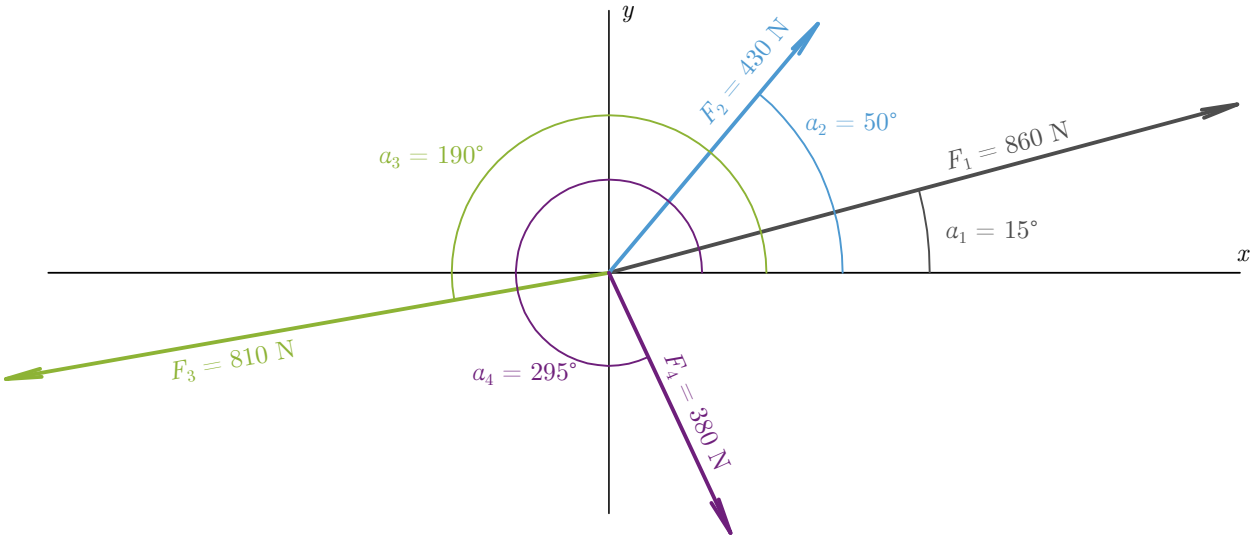
2.2.A

$F_1 = 5\,\mathrm{kN}$, $\alpha_1 = 45°$, $F_2 = 4\,\mathrm{kN}$, $\alpha_2 = 100°$, $F_3 = 6\,\mathrm{kN}$, $\alpha_3 = 220°$.



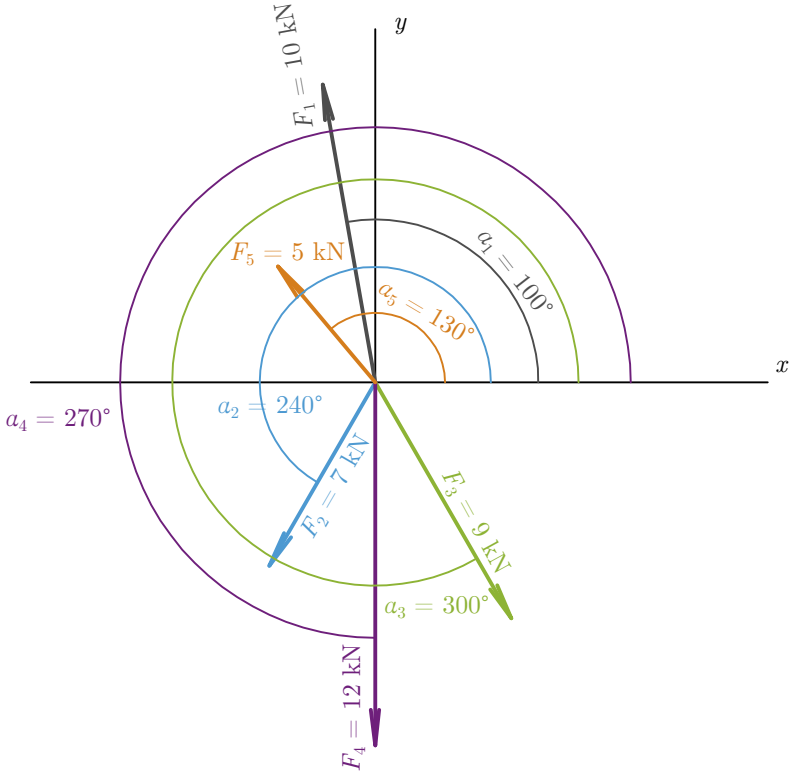
2.2.B

$F_1 = 860\,\mathrm{N}$, $\alpha_1 = 15°$, $F_2 = 430\,\mathrm{N}$, $\alpha_2 = 50°F_3 = 810\,\mathrm{N}$, $\alpha_3 = 190°$, $F_1 = 380\,\mathrm{N}$, $\alpha_4 = 295°$.



2.2.C

$F_1 = 10\,\mathrm{kN}$, $\alpha_1 = 100°$, $F_2 = 7\,\mathrm{kN}$, $\alpha_2 = 240°$, $F_3 = 9\,\mathrm{kN}$, $\alpha_3 = 300°$, $F_4 = 12\,\mathrm{kN}$, $\alpha_4 = 270°$, $F_5 = 5\,\mathrm{kN}$, $\alpha_1 = 130°$.



3 Obecná soustava sil v rovině

3.1 Určení výslednice obecné soustavy sil v rovině

Opět máme na výběr dva způsoby řešení – početně nebo graficky.

Početní řešení

U každé soustavy sil v rovině musíme mít na paměti platnost:

a) podmínek rovnováhy

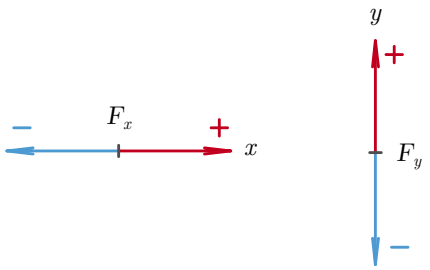
$$\sum_{i=1}^{n} F_i = 0 \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} F_i p_i = 0$$

kde F ... síla v obecné poloze,

F_x ... vodorovná složka síly F (působící v ose x),

F_y ... vodorovná složka síly F (působící v ose y),



M ... statický moment síly,

p ... rameno, na kterém se síla otáčí (nejkratší, tj. kolmá, vzdálenost od zvoleného momentového středu).

b) Varignonovy věty, která říká:

algebraický součet statických momentů všech sil obecné soustavy sil v rovině k libovolně zvolenému momentovému středu je roven statickému momentu výslednice této soustavy sil k témuž bodu

$$\begin{aligned} \curvearrowright + \quad \sum_{i=1}^{n} M_i &= M_R \\ \sum_{i=1}^{n} F_i p_i &= R p_R \end{aligned}$$

a zároveň platí

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i \begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \end{cases}$$

kde M_R ... statický moment výslednice ke zvolenému momentovému středu,

R ... výslednice soustavy sil,

p_R ... rameno, na kterém výslednice působí ke zvolenému momentovému středu,

R_x ... vodorovná složka výslednice R a

R_y ... vodorovná složka výslednice R.

Grafické řešení

Využíváme složkovou čáru, pomocí které sestrojujeme výslednicovou čáru (tvoří výslednicový obrazec).

Mějme na paměti, že jak složková, tak výslednicová čára musí být vždy uzavřena!

Zatímco pomocí výslednicové čáry určíme velikost a směr výslednice R.

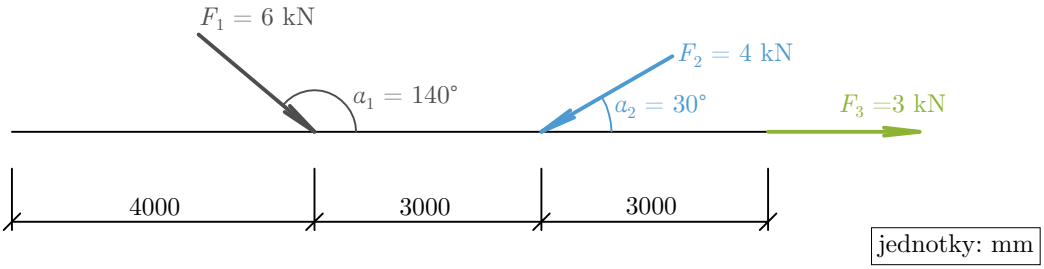
Postup:

1. Provedeme složkovou čáru, pak známe velikost a směr výslednice.
2. Zvolíme si pól (označíme O) mimo složkovou čáru.
3. Uděláme pólové paprsky, které označíme římskými čísly (I, II, III, ...)
4. V soustavě sil si zvolíme bod na první síle F_1 a z tohoto bodu vedeme rovnoběžku s pólovým paprskem I, kterou protáhneme, protože na této rovnoběžce se bude nacházet průsečík , kterým pak povedeme výslednici R.
5. Ze stejného bodu na síle F_1 vedeme rovnoběžku s pólovým paprskem II, kterou protneme paprsek síly F_2.
6. Z bodu, kde jsme protli paprsek síly F_2 vedeme rovnoběžku s pólovým paprskem III, až protneme paprsek síly F_3.
7. Tak pokračujeme postupně, dokud neprovedeme rovnoběžky se všemi pólovými paprsky. Princip je jednoduchý – každý pólový paprsek musí protnout ty síly, podle kterých je označen daný vrchol složkové čáry. Např. pólový paprsek I spojuje pól O s vrcholem složkové čáry $1 = R$, pak musí protínat sílu F_1 a výslednici R apod.

8. V místě, kde je průsečík prvního a posledního pólového paprsku vedeme rovnoběžku s výslednicí složkové čáry a tím máme určenu polohu výslednice.

Příklad 3.1.1

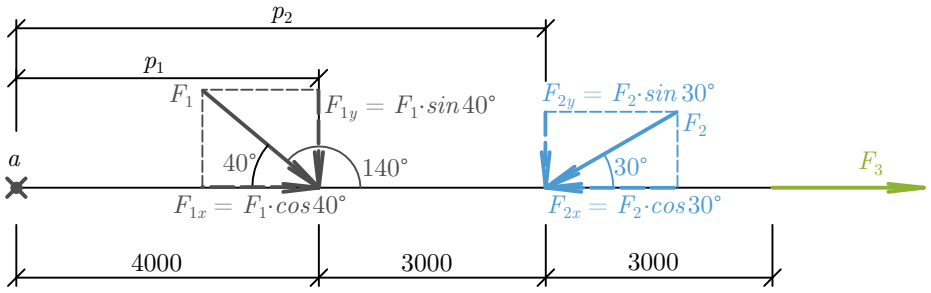
Určete výslednice této soustavy sil



Početní řešení:

Protože již víme, že každou sílu lze rozložit na vodorovnou a svislou složku, doporučuji takto postupovat, aby se nám lépe určovala ramena statických momentů, která budeme dále ve výpočtu potřebovat.

Stejně tak je vhodné vyznačit na nosníku, kde se soustava sil nachází, zvolený momentový střed, ke kterému budeme počítat. Budeme ho označovat malými písmeny, např. a.



$$F_{1x} = 6\cos 40° = 4,596\,\text{kN}$$
$$F_{1y} = 6\sin 40° = 3,857\,\text{kN}$$

$$F_{2x} = 4\cos 30° = 3,464\,\text{kN}$$
$$F_{2y} = 4\sin 30° = 2\,\text{kN}$$

Varignonova věta

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x} \\ R_x &= 4,596 - 3,464 + 3 = 4,132\,\text{kN} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} - F_{2y} + F_{3y} \\ R_y &= -3,857 - 2 = -5,857\,\text{kN} \downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4,132^2 + (-5,857)^2} = 7,17\,\text{kN} \\ \tan\alpha_R &= \frac{R_y}{R_x} = \frac{-5,857}{4,132} = -1,417 \\ \alpha_R &= -54,8^\circ \end{aligned}$$

$\curvearrowright +$ momenty, které se kolem zvoleného momentového středu a, točí po směru hodinových ručiček, jsou kladné.

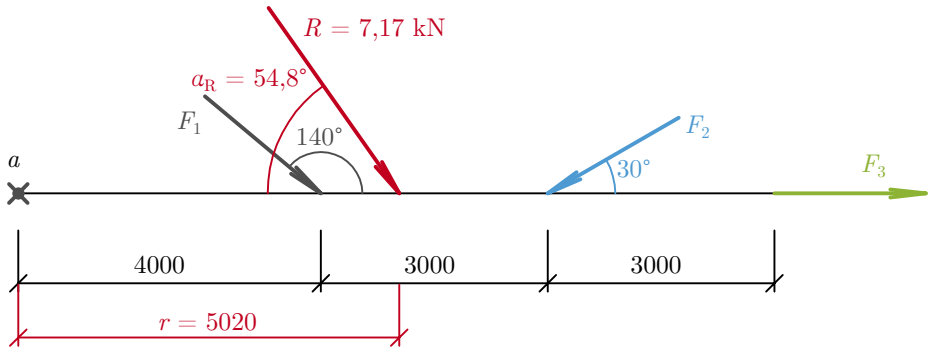
$$\begin{aligned} M_R &= \sum_{i=1}^{n} M_i = F_{y1}p_1 + F_{y2}p_2 \\ Rp_R &= 3,857 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \\ 7,17p_R &= 29,428 \\ p_R &= 4,104\,\text{m} \end{aligned}$$

Síla F_3 přímo prochází bodem a, pak $p_3 = 0$.

Určím také vzdálenost výslednice R od zvoleného momentového středu a na nosníku

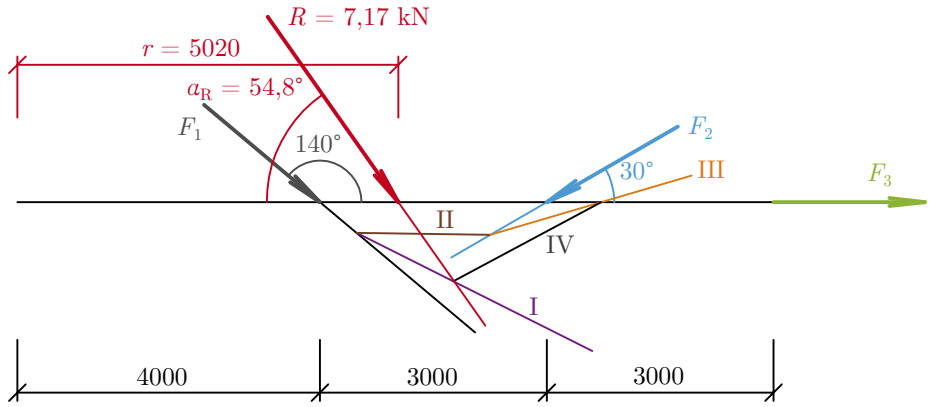
$$\begin{aligned} |R_y|r &= 29,428 \\ r &= \frac{29,428}{|R_y|} = \frac{29,428}{5,857} \\ r &= 5,02\,\text{m} \end{aligned}$$

Výslednici vždy zakreslíme a zakótujeme do zadání

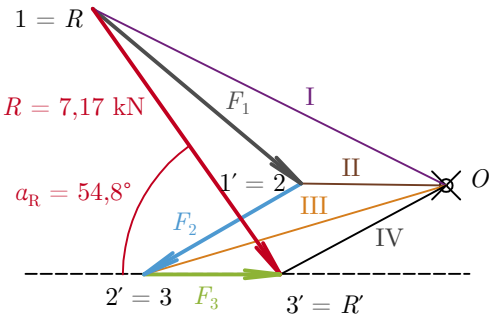


Grafické řešení:

a) výslednicová čára

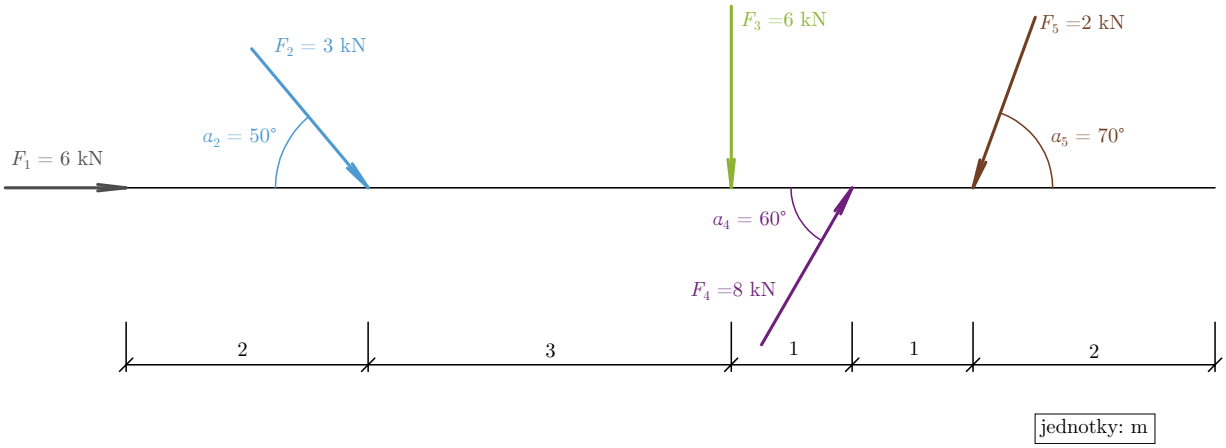


b) složková čára



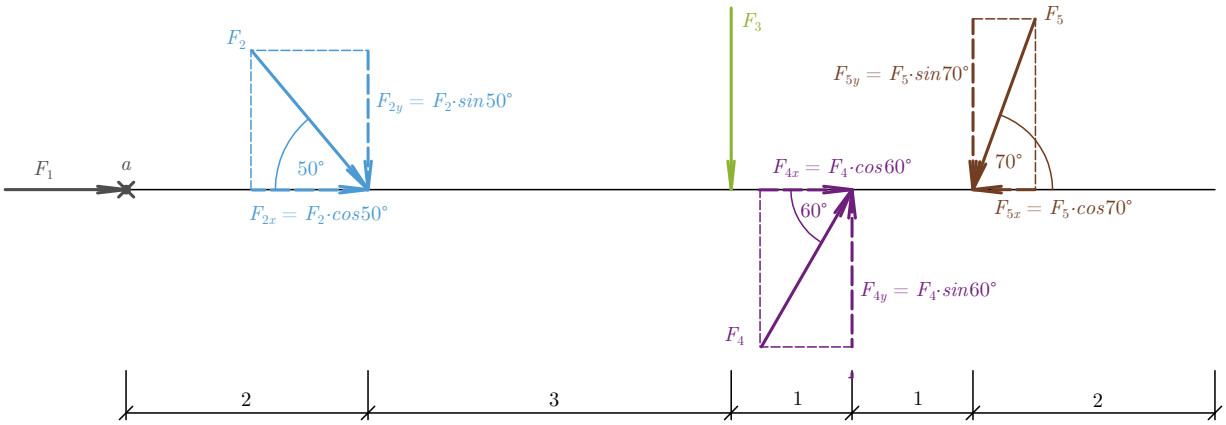
Příklad 3.1.2

Určete výslednici této soustavy sil.



jednotky: m

Početní řešení:



$$
\begin{aligned}
F_{2x} &= 3\cos 50^\circ = 1,928\,\text{kN} \\
F_{2y} &= 3\sin 50^\circ = 2,298\,\text{kN} \\
F_{4x} &= 8\cos 60^\circ = 4\,\text{kN} \\
F_{4y} &= 8\sin 60^\circ = 6,928\,\text{kN} \\
F_{5x} &= 2\cos 70^\circ = 0,684\,\text{kN} \\
F_{5y} &= 2\sin 70^\circ = 1,879\,\text{kN}
\end{aligned}
$$

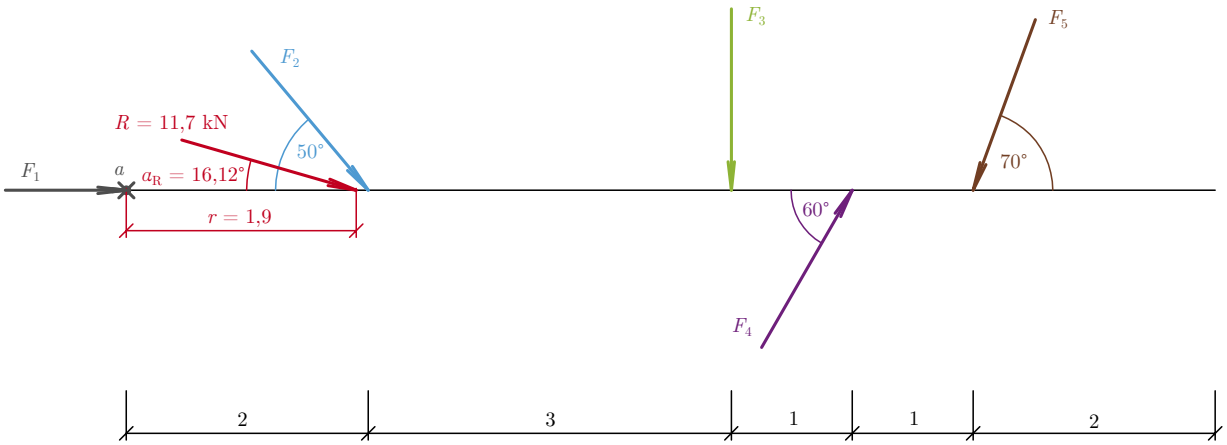
$$
\begin{aligned}
R_x &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{4x} - F_{5x} \\
R_x &= 6 + 1,928 + 4 - 0,684 = 11,244\,\text{kN} \rightarrow
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} R_y &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = -F_{2y} - F_3 + F_{4y} - F_{5y} \\ R_y &= -2,298 - 6 + 6,928 - 1,879 = -3,249\,\text{kN} \downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{11,244^2 + (-3,249)^2} = 11,7\,\text{kN} \\ \tan\alpha_R &= \frac{R_y}{R_x} = \frac{-3,249}{11,244} = -0,289 \\ \alpha_R &= -16,117^\circ \end{aligned}$$

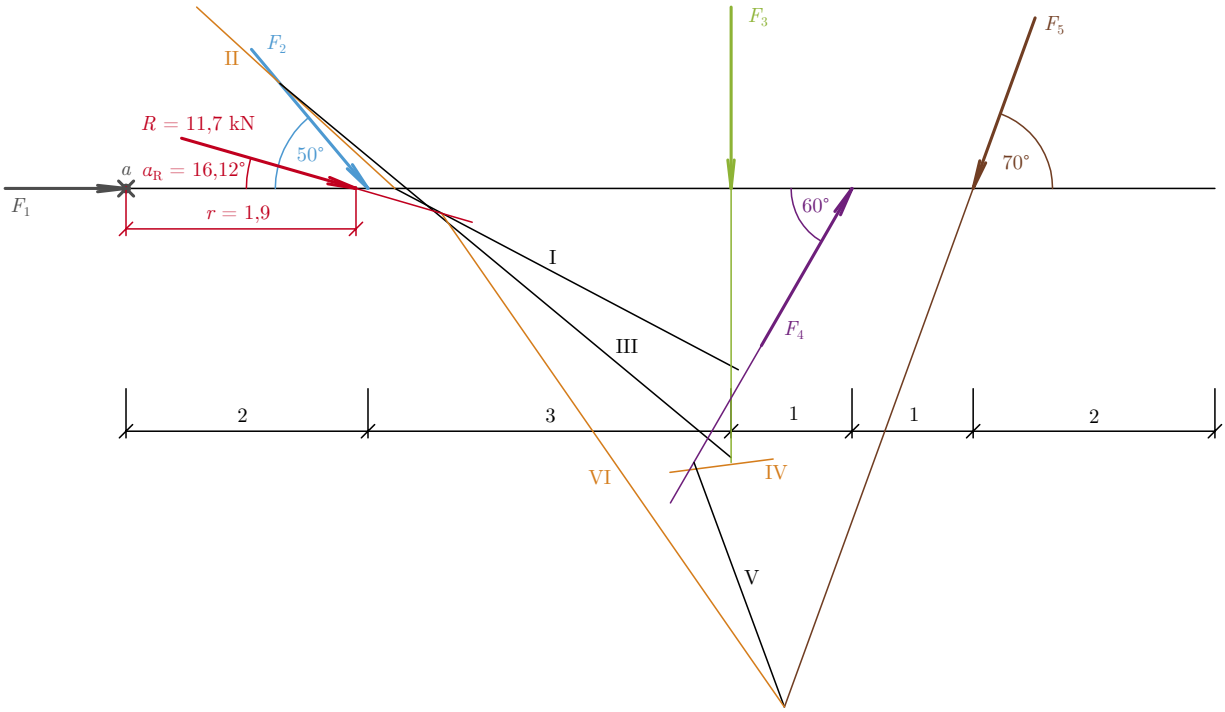
$$\begin{aligned} Rp_R &= 2,298 \cdot 2 + 6 \cdot 5 - 6,928 \cdot 6 + 1,879 \cdot 7 \\ 11,7p_R &= 6,181 \\ p_R &= 0,528\,\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y r &= 6,181 \\ 3,249r &= 6,181 \\ r &= 1,9\,\text{m} \end{aligned}$$

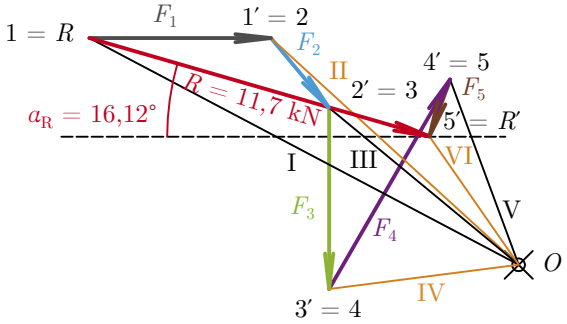


Grafické řešení:

a) výslednicová čára

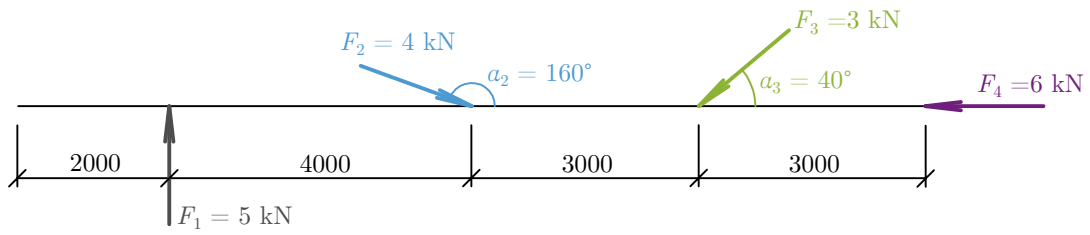


b) složková čára



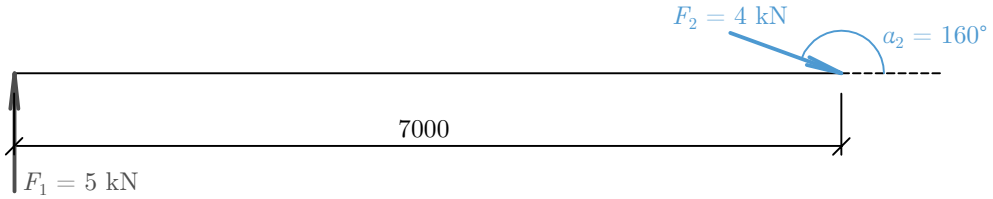
Příklady k procvičení

3.1.A



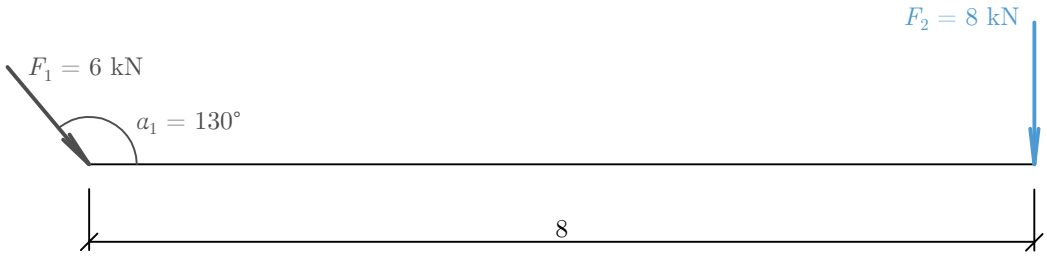
jednotky: mm

3.1.B



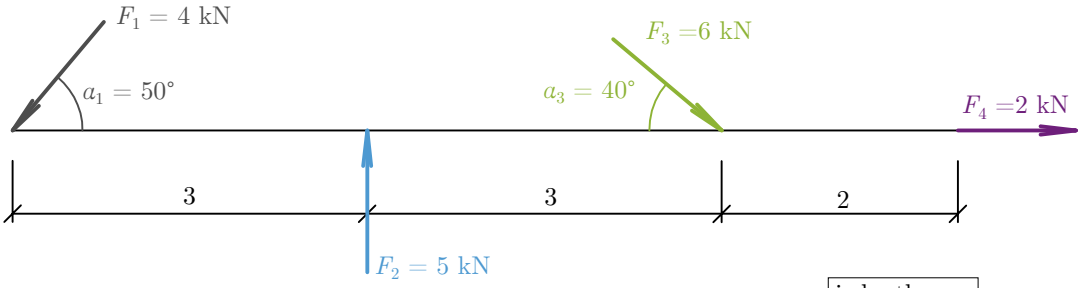
jednotky: mm

3.1.C



jednotky: m

3.1.D



jednotky: m

3.2 Určení výslednice rovnoběžných sil v rovině

Rovinná soustava rovnoběžných sil se liší od jiných rovinných svazků tím, že průsečík rovnoběžných sil je v nekonečnu, což logicky znamená, že výslednice takové soustavy je se silami rovnoběžná.

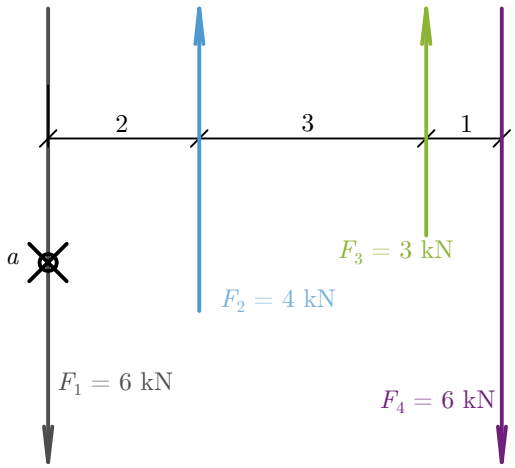
I zde je nutné zavést si znaménkovou konvenci, proto si zavedeme souřadný systém x, y tak, že osa y je rovnoběžná se silami a všechny x-ové složky jsou tedy rovny nule.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \implies R_x = 0 \implies R = R_y$$

Pro řešení výslednice soustavy rovnoběžných sil platí stejná pravidla jako pro řešení obecné soustavy sil.

Příklad 3.2.1

Určete výslednici této soustavy rovnoběžných sil. $F_1 = 6\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 4\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 3\,\mathrm{kN}$, $F_4 = 6\,\mathrm{kN}$.



jednotky: m

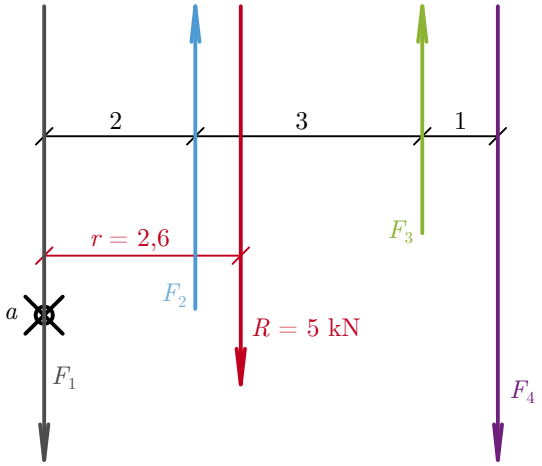
Početní řešení:

$$\begin{aligned} R &= R_y = \sum_{i=1}^{4} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} \\ R &= -6 + 4 + 3 - 6 = -5\,\mathrm{kN} \downarrow \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_R &= \sum_{i=1}^{4} M_i \\
|R|r &= \sum_{i=1}^{4} F_{iy} r_i = F_{1y} r_1 + F_{2y} r_2 + F_{3y} r_3 + F_{4y} r_4 \ \curvearrowright + \\
5r &= 6 \cdot 0 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 6 \cdot 6 \\
5r &= 13 \\
r &= 2,6\,\mathrm{m} \curvearrowright
\end{aligned}
$$

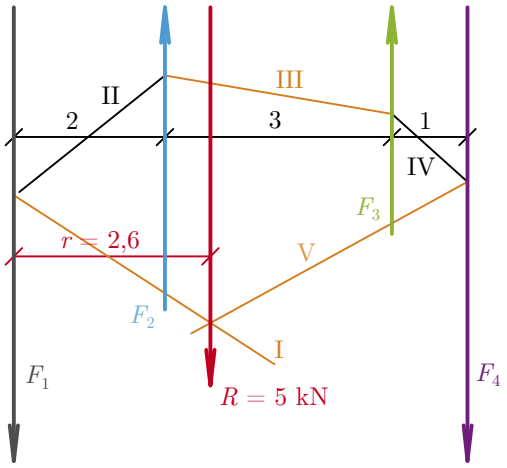
Momentový střed je vhodné (ale ne nezbytné) volit na jedné ze sil.

Zakreslení výslednice

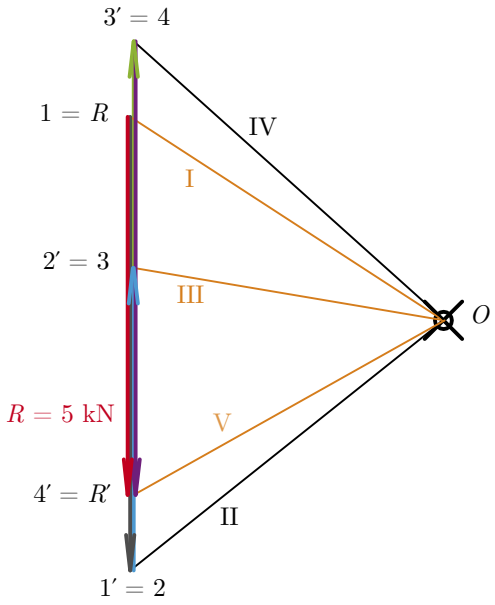


Grafické řešení:

a) výslednicová čára

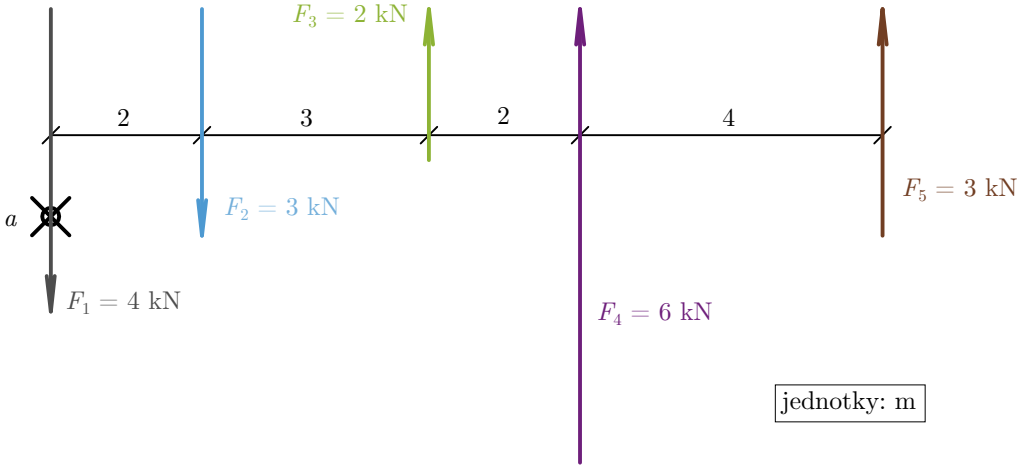


b) složková čára



Příklad 3.2.2

Určete výslednici této soustavy rovnoběžných sil. $F_1 = 4\,\text{kN}$, $F_2 = 3\,\text{kN}$, $F_3 = 2\,\text{kN}$, $F_4 = 6\,\text{kN}$, $F_5 = 3\,\text{kN}$.

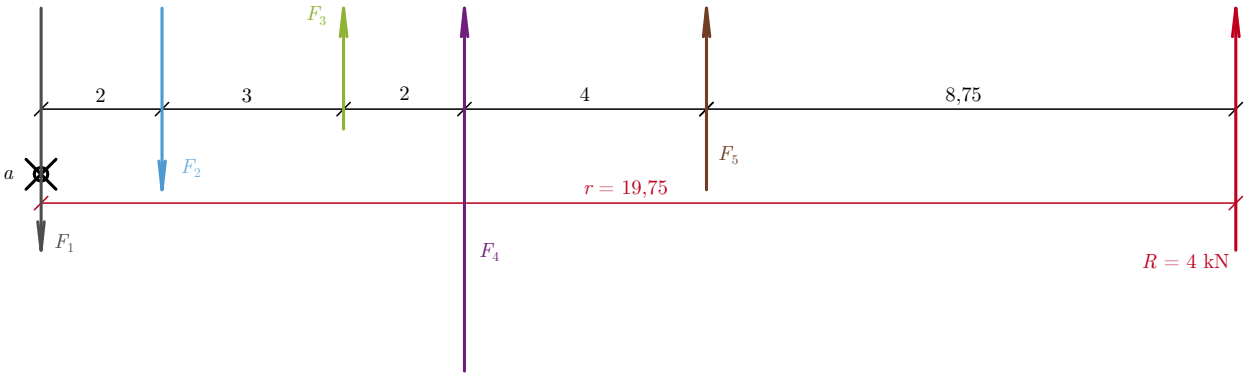


Početní řešení:

$$R = R_y = \sum_{i=1}^{5} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} + F_{5y}$$
$$R = -4 - 3 + 2 + 6 + 3 = 4\,\text{kN} \uparrow$$

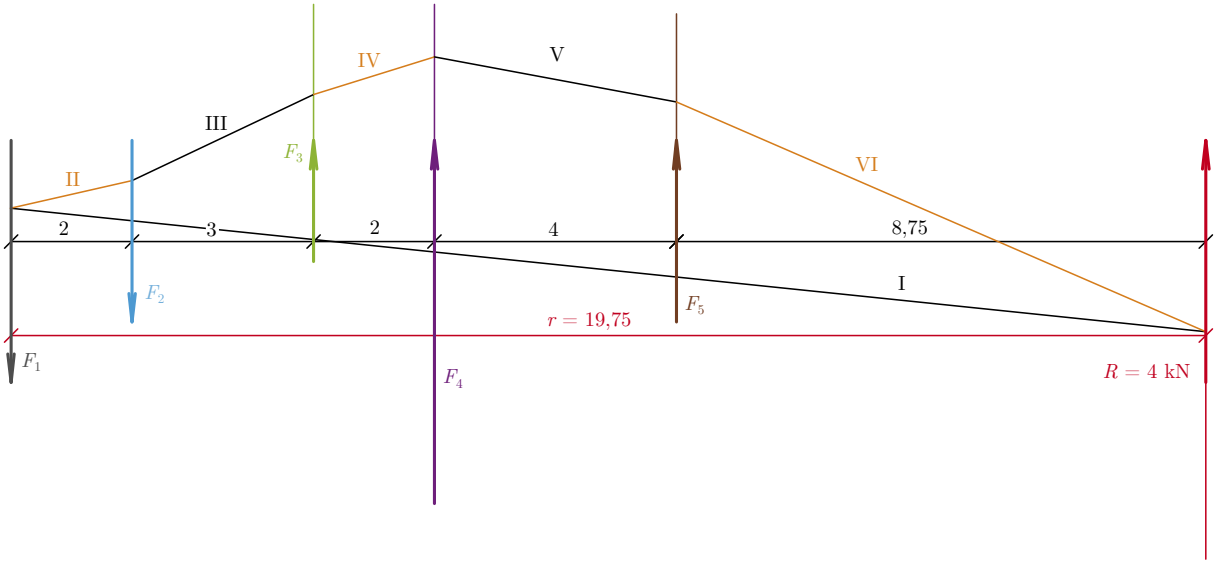
$$
\begin{aligned}
M_R &= \sum_{i=1}^{5} M_i \\
|R|r &= \sum_{i=1}^{4} F_{iy} r_i = F_{1y} r_1 + F_{2y} r_2 + F_{3y} r_3 + F_{4y} r_4 + F_{5y} r_5 \quad \curvearrowright + \\
4r &= 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 - 6 \cdot 7 - 3 \cdot 11 \\
r &= -19,75\,\mathrm{m} \curvearrowleft
\end{aligned}
$$

Zakreslení výslednice

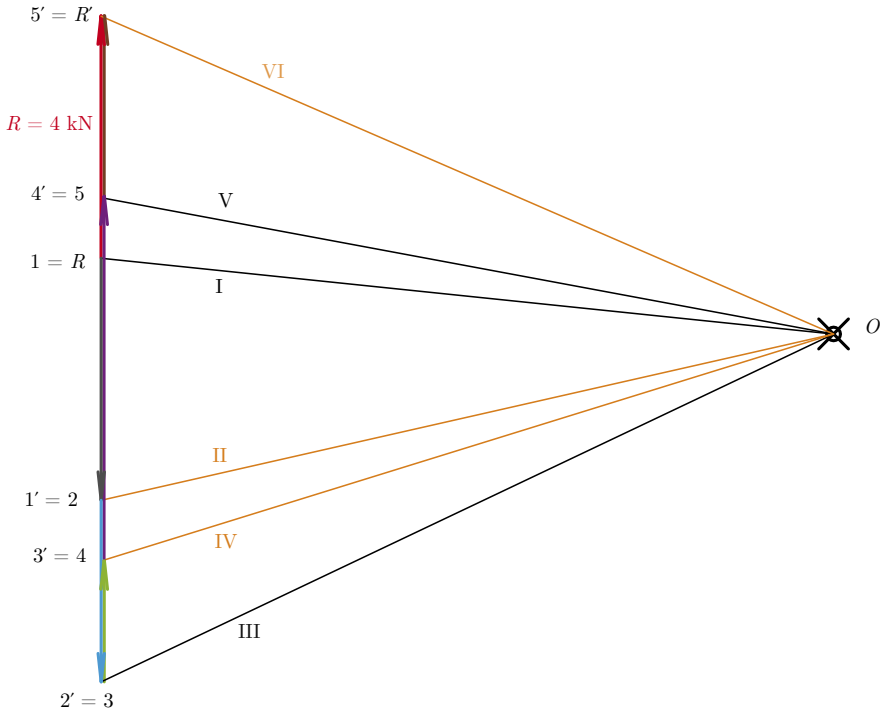


Grafické řešení:

a) výslednicová čára

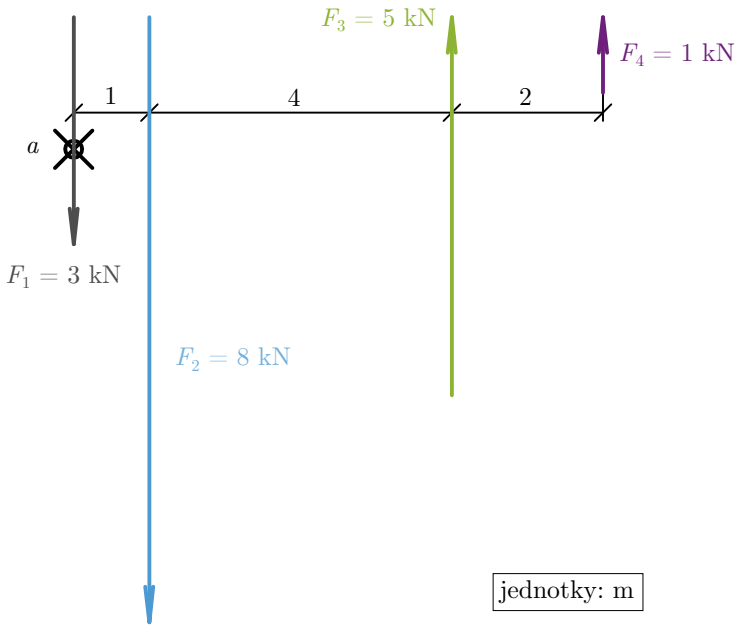


b) složková čára



Příklad 3.2.3

Určete výslednici této soustavy rovnoběžných sil. $F_1 = 3\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 8\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 5\,\mathrm{kN}$, $F_4 = 1\,\mathrm{kN}$.

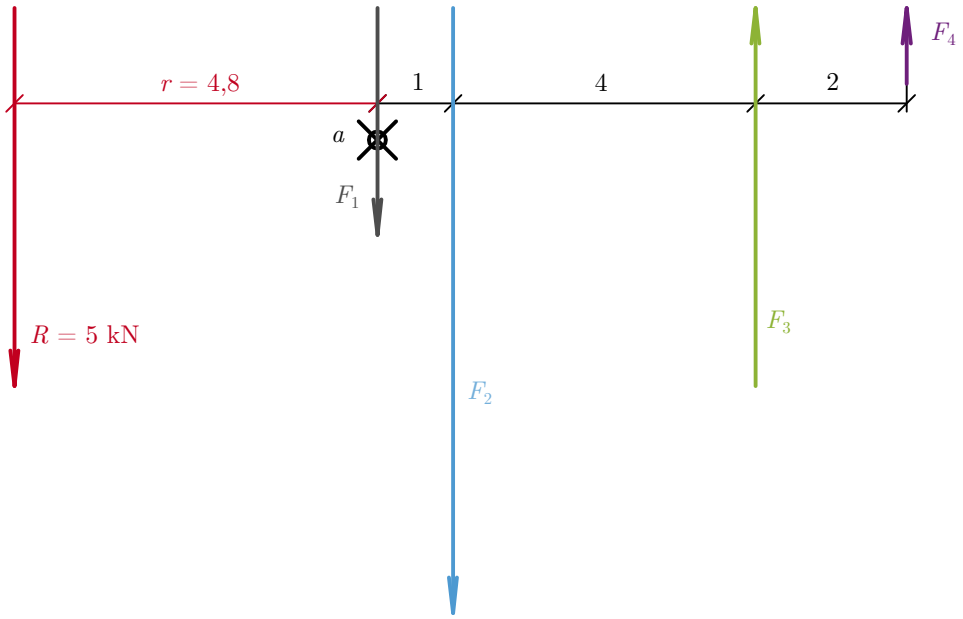


Početní řešení:

$$\begin{aligned} R &= R_y = \sum_{i=1}^{4} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} \\ R &= -3 - 8 + 5 + 1 = -5\,\mathrm{kN}\downarrow \end{aligned}$$

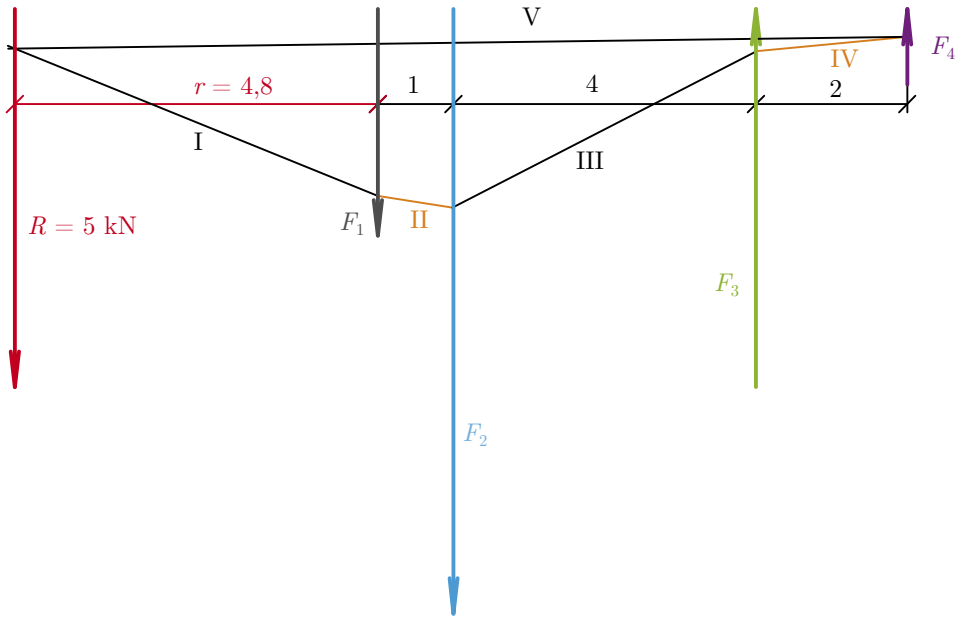
$$\begin{aligned} M_R &= \sum_{i=1}^{4} M_i \\ |R|r &= \sum_{i=1}^{4} F_{iy} r_i = F_{1y} r_1 + F_{2y} r_2 + F_{3y} r_3 + F_{4y} r_4 \\ 5r &= 3 \cdot 0 + 8 \cdot 1 - 5 \cdot 5 - 1 \cdot 7 \\ r &= -4,8\,\mathrm{m}\,\circlearrowleft \end{aligned}$$

Zakreslení výslednice

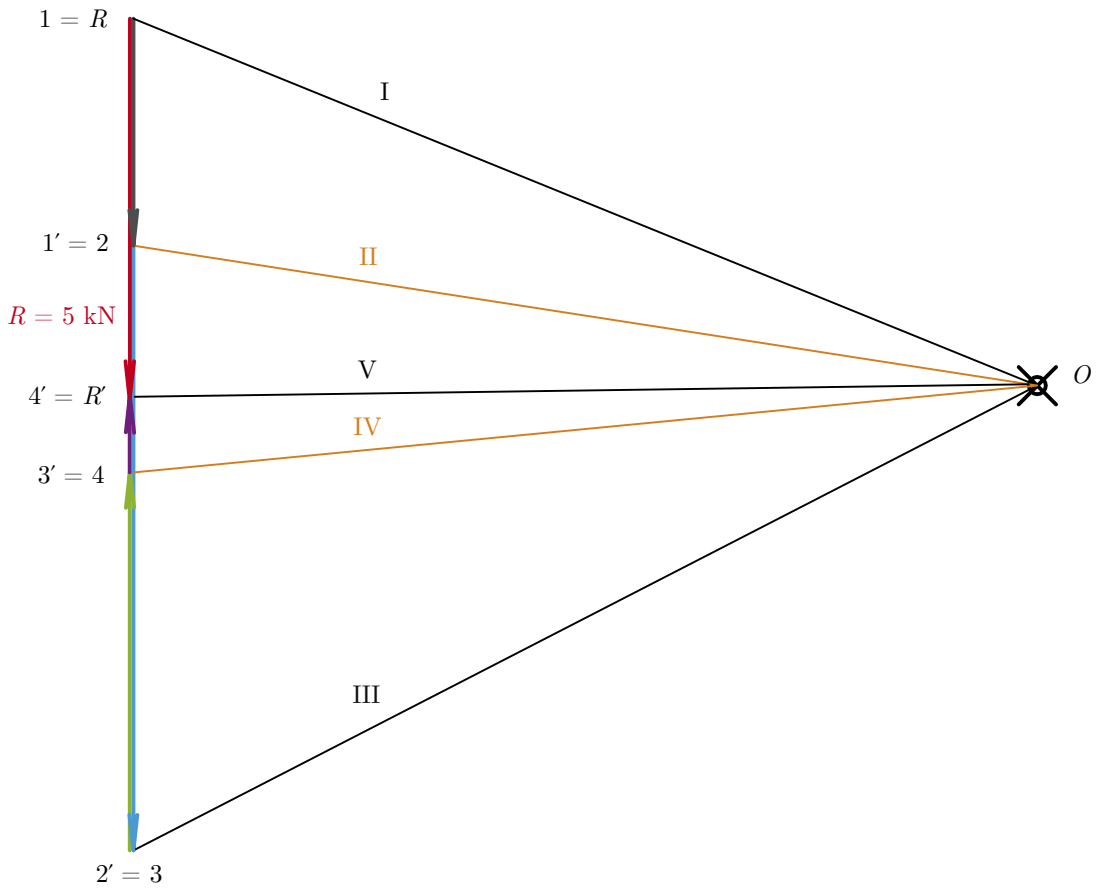


Grafické řešení:

a) výslednicová čára

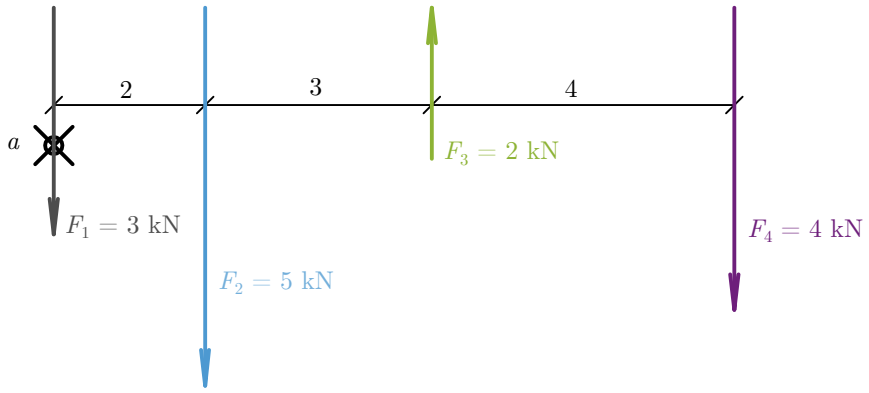


b) složková čára



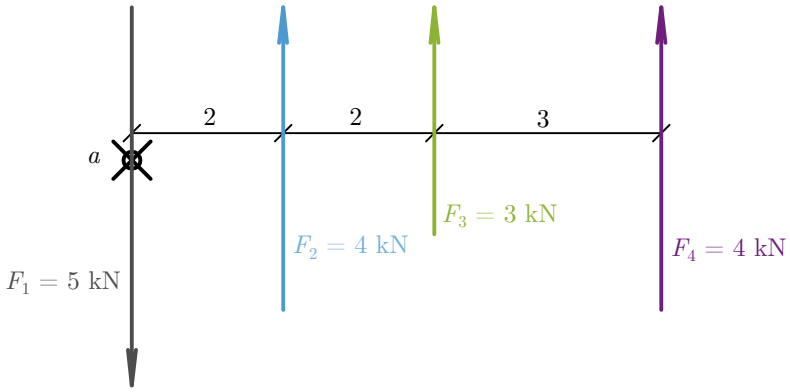
Příklady k procvičení

3.2.A



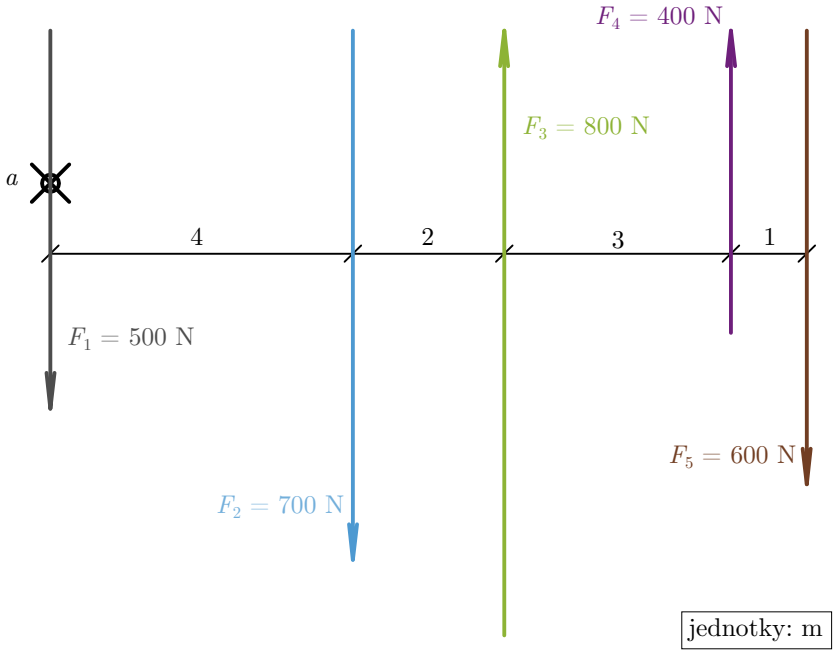
jednotky: m

3.2.B



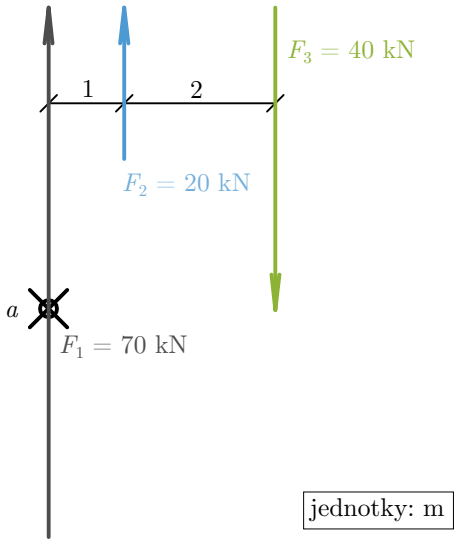
jednotky: m

3.2.C



jednotky: m

3.2.D



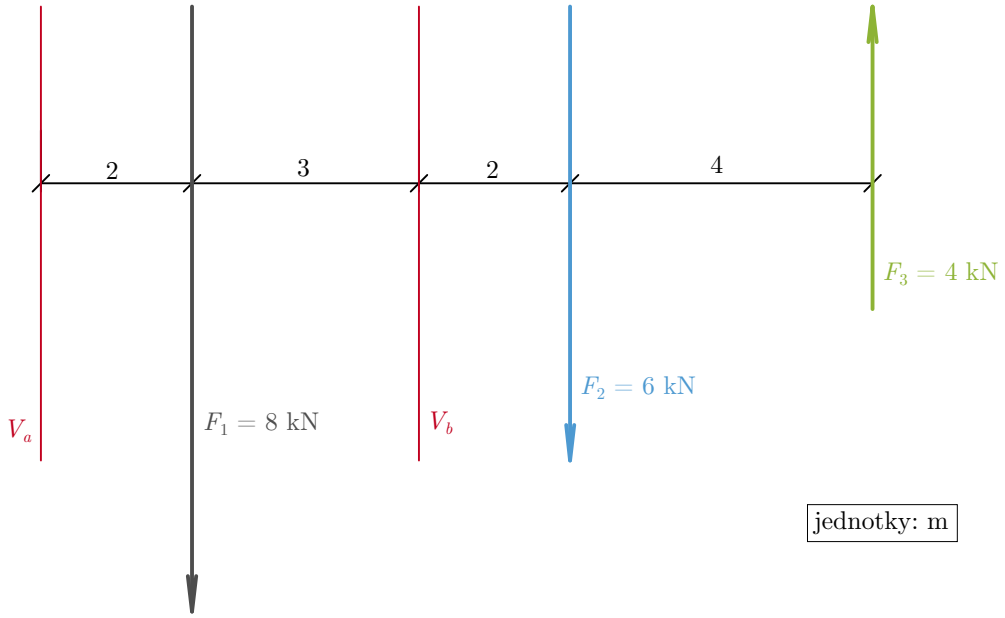
3.3 Rovnováha soustavy rovnoběžných sil

Aby byla jakákoliv soustava sil v rovnováze, musí být splněny podmínky rovnováhy (viz kapitola 3.1).

Právě pomocí těchto rovnic – v případě početního řešení, nebo pomocí složkové čáry a výslednicového obrazce – v případě grafického řešení, dáváme soustavu sil do rovnováhy. U grafické metody je základní nosnou myšlenkou, že jak složková, tak výslednicová čára musí být uzavřena.

Příklad 3.3.1

Uveďte soustavu rovnoběžných sil do rovnováhy pomocí dvou sil V_a a V_b, jejichž poloha je dána. Určete jak jejich velikost, tak i jejich smysl.



Početní řešení:

Zvolíme si na síle V_b momentový střed b a sestavíme momentovou podmínku rovnováhy k bodu b, ze které vypočítáme sílu V_a. Sílu V_a uvažujeme vždy kladnou, teprve až znaménko výsledku nám ukáže orientaci momentu, který síla V_a vyvolává. Sílu V_b nemusíme uvažovat, protože $r_b = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\ V_a r_a + F_1 r_1 + F_2 r_2 + F_3 r_3 &= 0 \\ \curvearrowright + \quad V_a \cdot 5 - 8 \cdot 3 + 6 \cdot 2 - 4 \cdot 6 &= 0 \\ 5V_a &= 36 \\ V_a &= 7,2\,\text{kN} \curvearrowright + \end{aligned}$$

Z předchozího výsledku vyplývá, že síla V_a musí vyvolat kolem momentového středu b kladný moment, potom $V_a \uparrow$.

Zvolíme si na síle V_a momentový střed a a sestavíme momentovou podmínku rovnováhy k bodu a, ze které vypočítáme sílu V_b.

I zde platí, že neznámou sílu V_b uvažujeme jako kladnou a teprve výsledné znaménko nám ukáže, zda moment, který síla V_b vyvolává kolem bodu a, bude kladný $\curvearrowright$ nebo záporný $\curvearrowleft$. Tomu pak přizpůsobíme smysl síly.

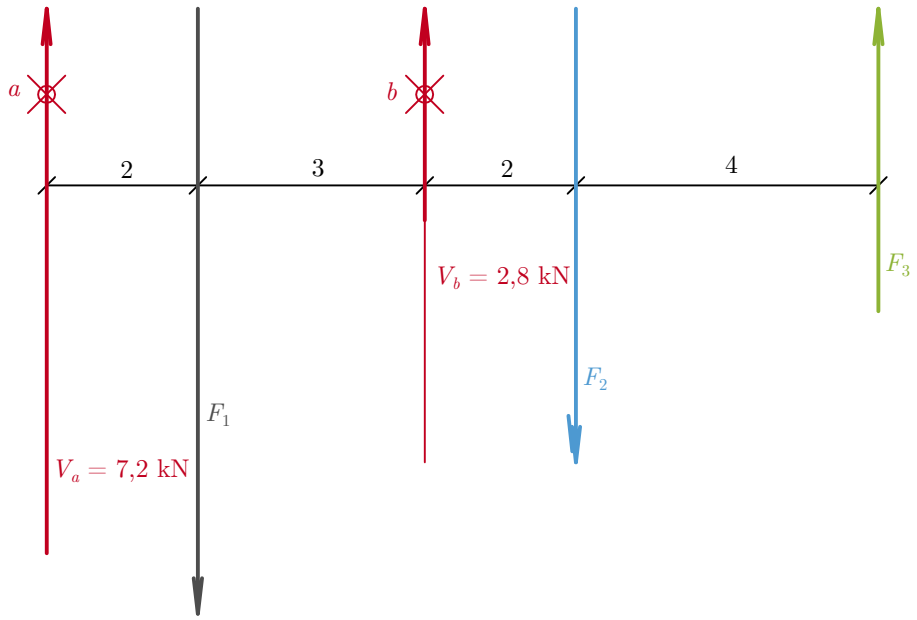
Ani v tomto případě nebudeme zahrnovat sílu V_a do momentové podmínky, protože stejně platí $r_a = 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
F_1 r_1 + V_b r_b + F_2 r_2 + F_3 r_3 &= 0 \\
8 \cdot 2 + V_b \cdot 5 + 6 \cdot 7 - 4 \cdot 11 &= 0 \\
5V_b &= -14 \\
V_b &= -2,8\,\text{kN} \curvearrowleft
\end{aligned}$$

Zkouška

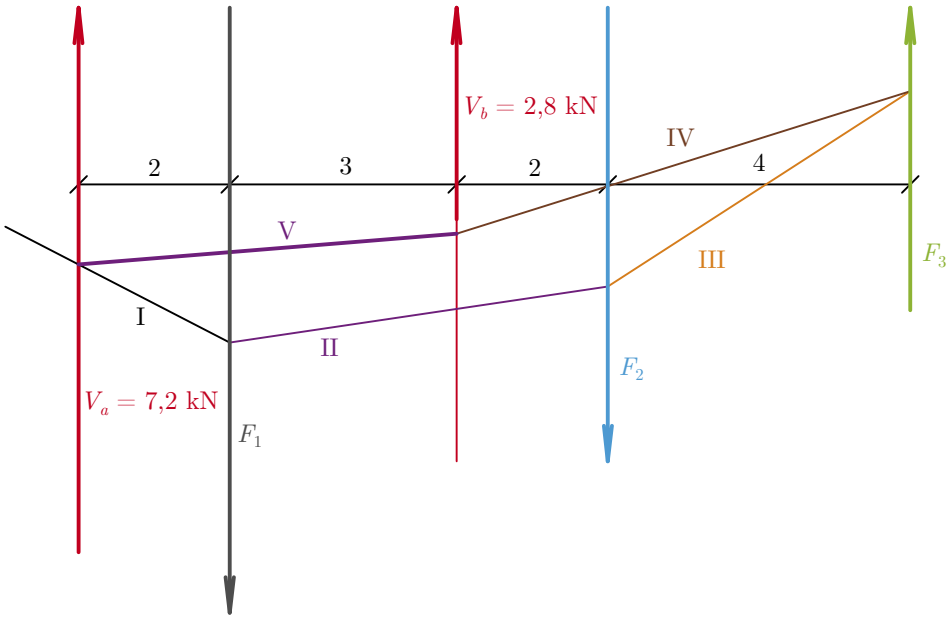
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_i &= 0 \\
V_a + F_1 + V_b + F_2 + F_3 &= 0 \\
7,2 - 8 + 2,8 - 6 + 4 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Zakreslení výsledků do zadání

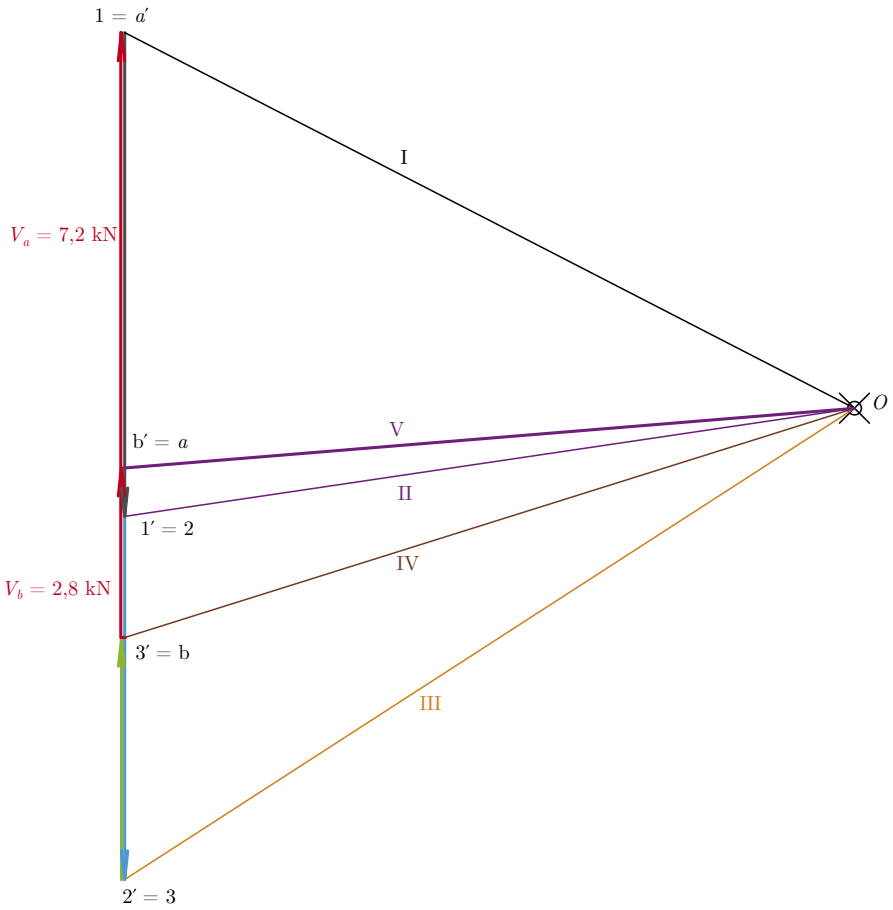


Grafické řešení:

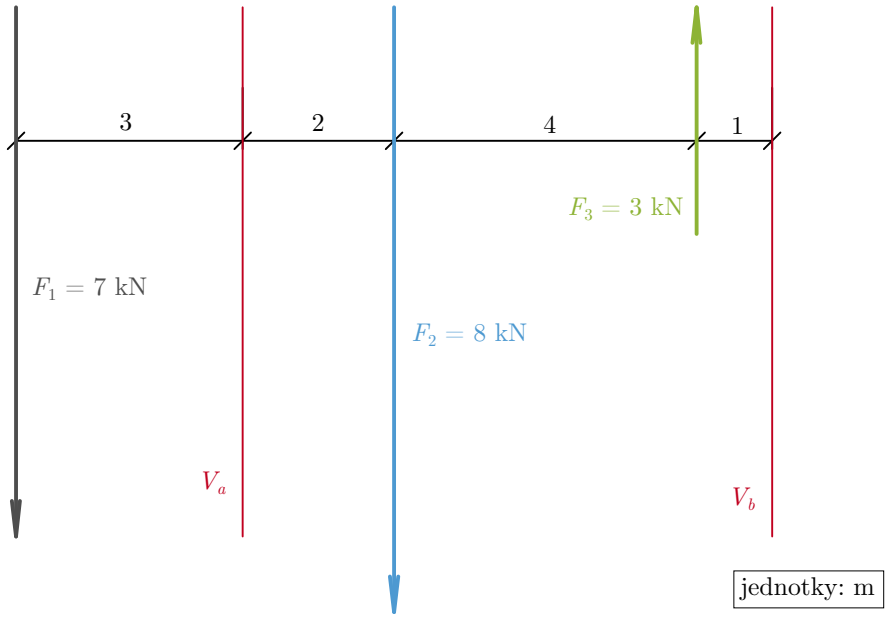
a) výslednicová čára



b) složková čára



Příklad 3.3.2



Početní řešení

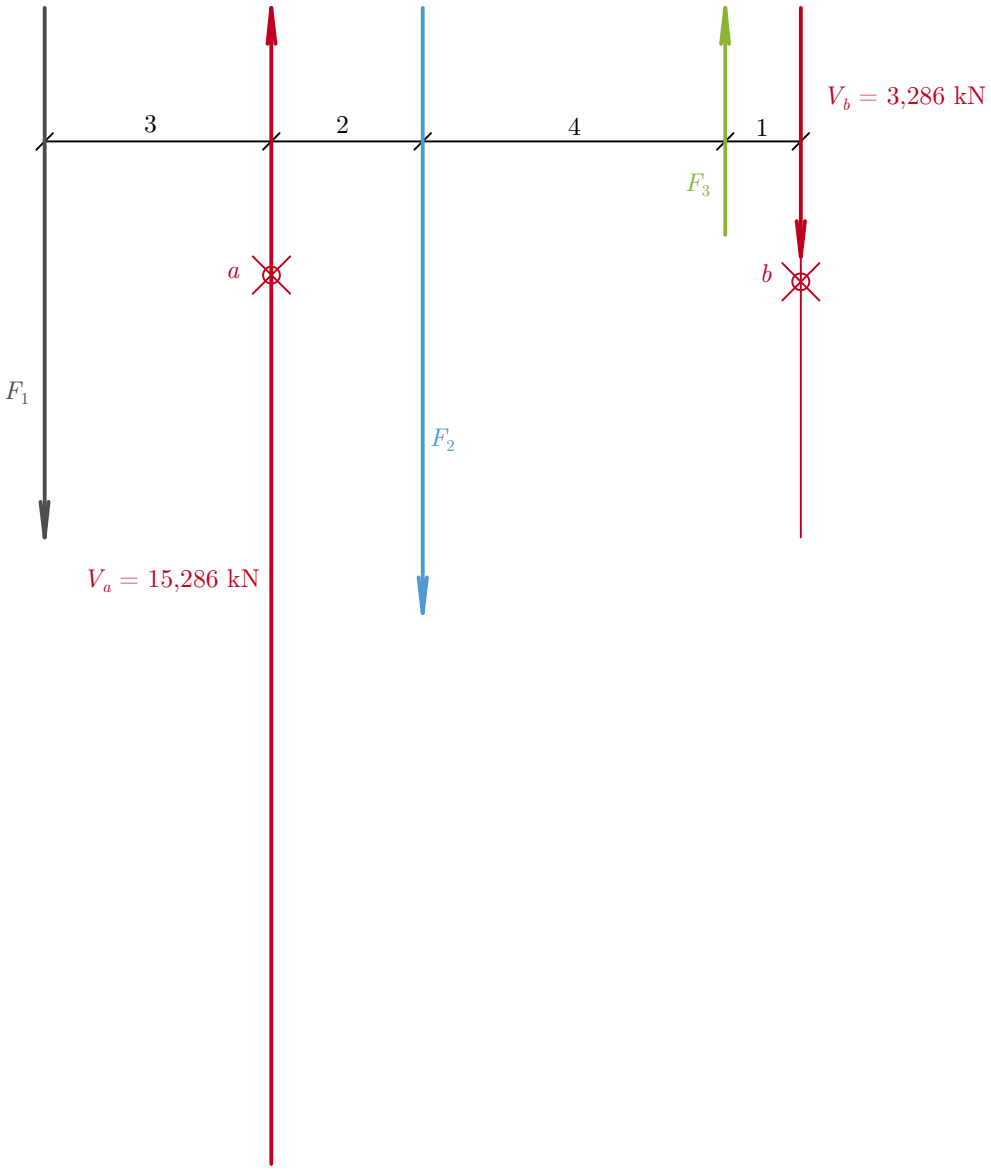
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\
F_1 r_1 + V_a r_a + F_2 r_2 + F_3 r_3 &= 0 \\
-7 \cdot 10 + V_a \cdot 7 - 8 \cdot 5 + 3 \cdot 1 &= 0 \\
7V_a &= 107 \\
V_a &= 15,286\,\text{kN} \curvearrowright
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
F_1 r_1 + F_2 r_2 + F_3 r_3 + V_b r_b &= 0 \\
-7 \cdot 3 + 8 \cdot 2 - 3 \cdot 6 + V_b \cdot 7 &= 0 \\
V_b &= 3,286\,\text{kN} \curvearrowright
\end{aligned}$$

Zkouška

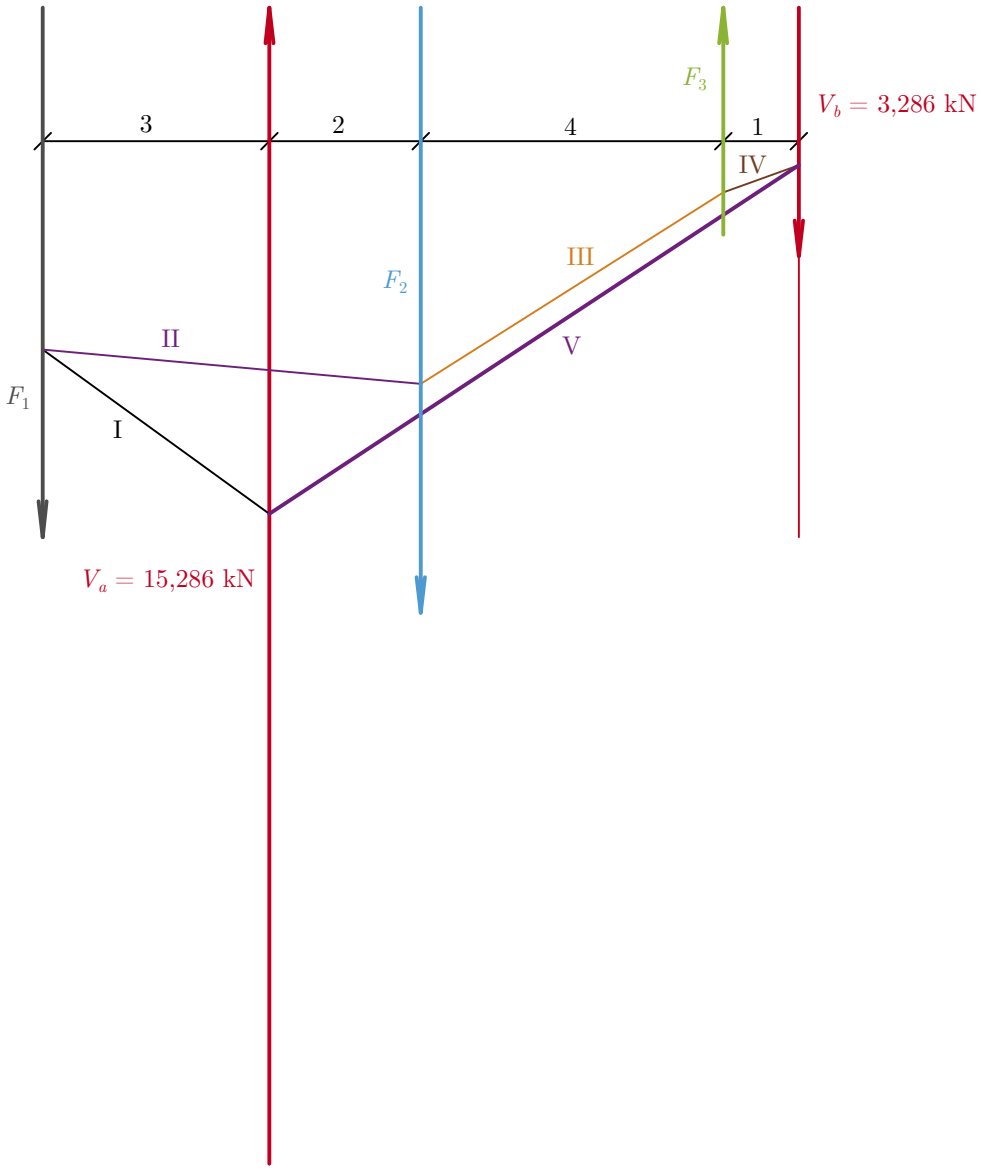
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_i &= 0 \\ F_1 + V_a + F_2 + F_3 + V_b &= 0 \\ -7 + 15,286 - 8 + 3 - 3,286 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Zakreslení do zadání

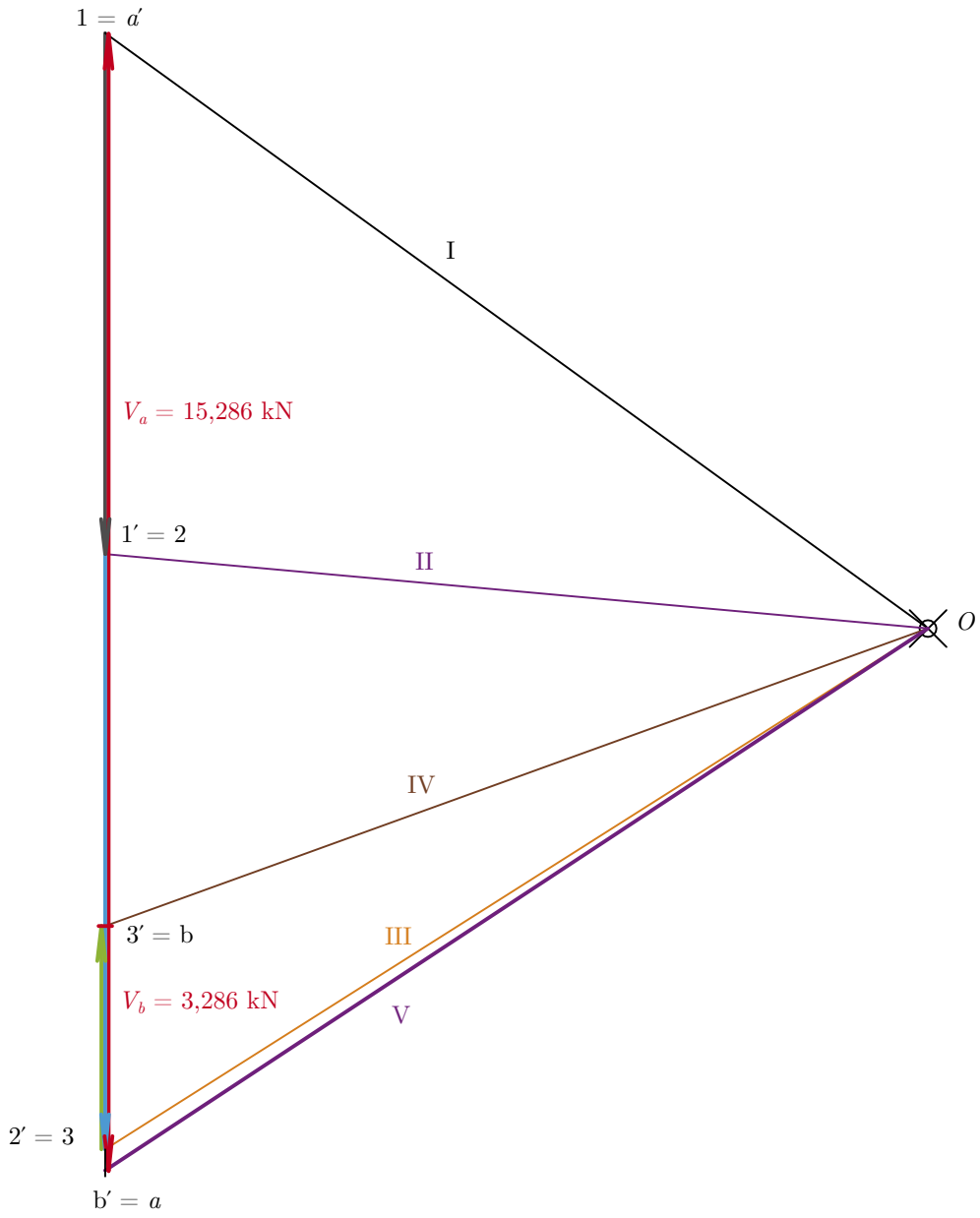


Grafické řešení

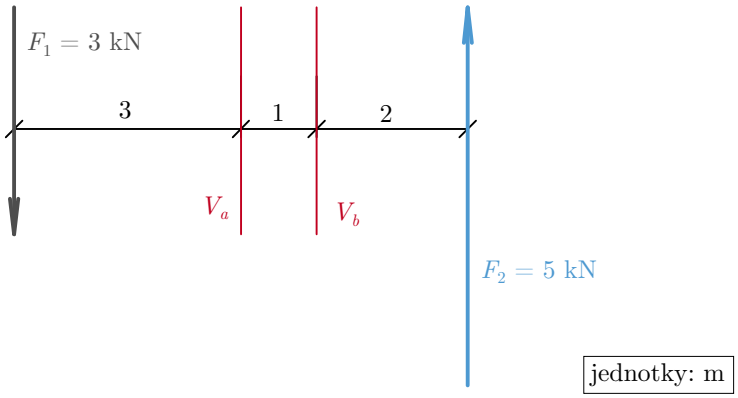
a) výslednicová čára



b) složková čára



Příklad 3.3.3



Početní řešení

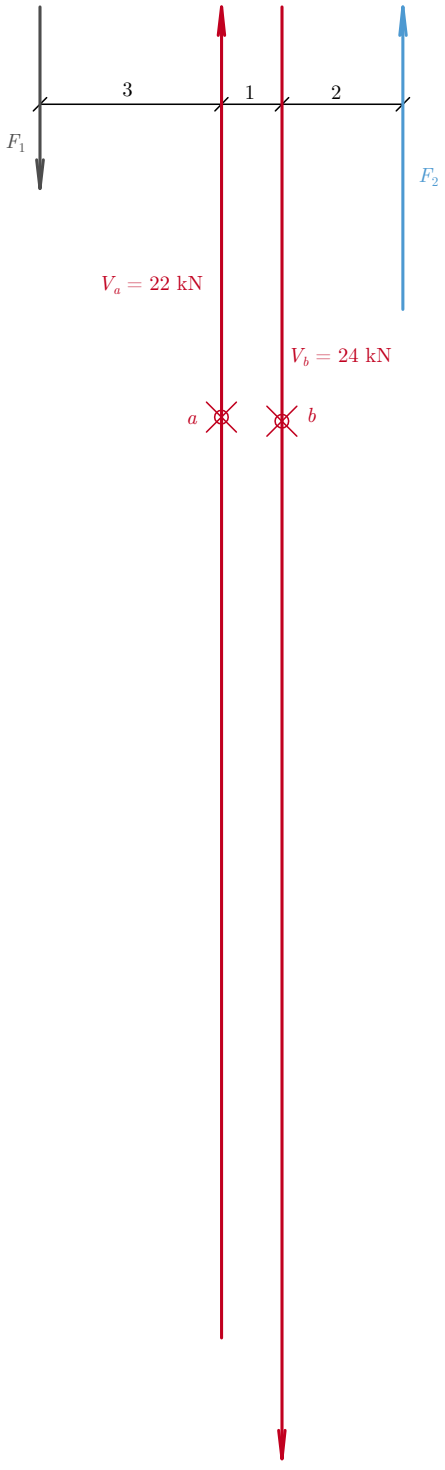
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\ F_1 r_1 + V_a r_a + F_2 r_2 &= 0 \\ -3 \cdot 4 + V_a \cdot 1 - 5 \cdot 2 &= 0 \\ V_a &= 22\,\text{kN} \curvearrowright \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\ F_1 r_1 + V_b r_b + F_2 r_2 &= 0 \\ -3 \cdot 3 + V_b \cdot 1 - 5 \cdot 3 &= 0 \\ V_b &= 24\,\text{kN} \curvearrowright \end{aligned}$$

Zkouška

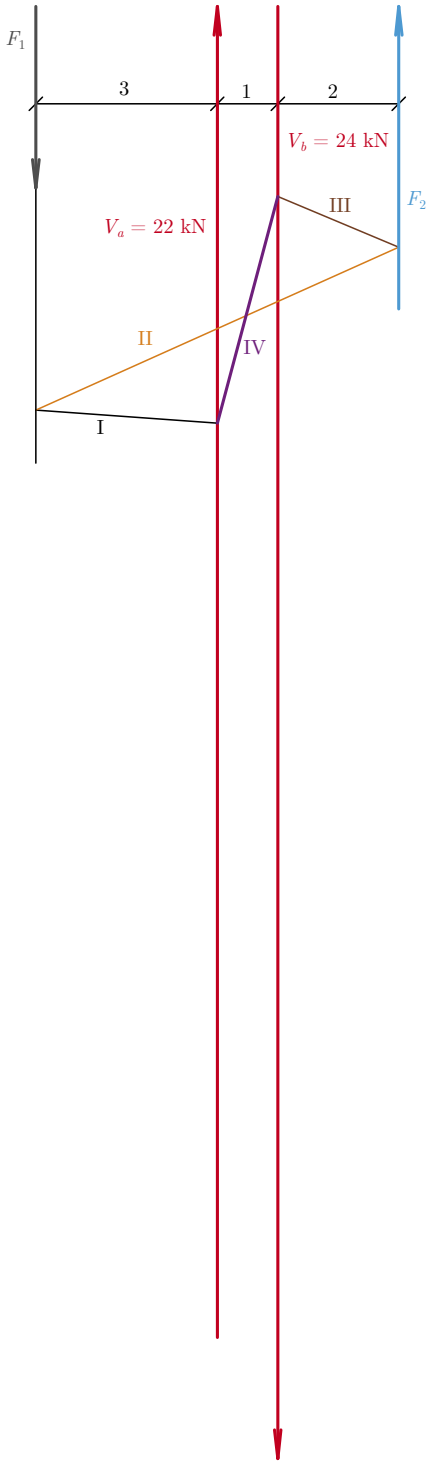
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_i &= 0 \\ F_1 + F_2 + V_a + V_b &= 0 \\ -3 + 22 - 24 + 5 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Zakreslení do zadání:

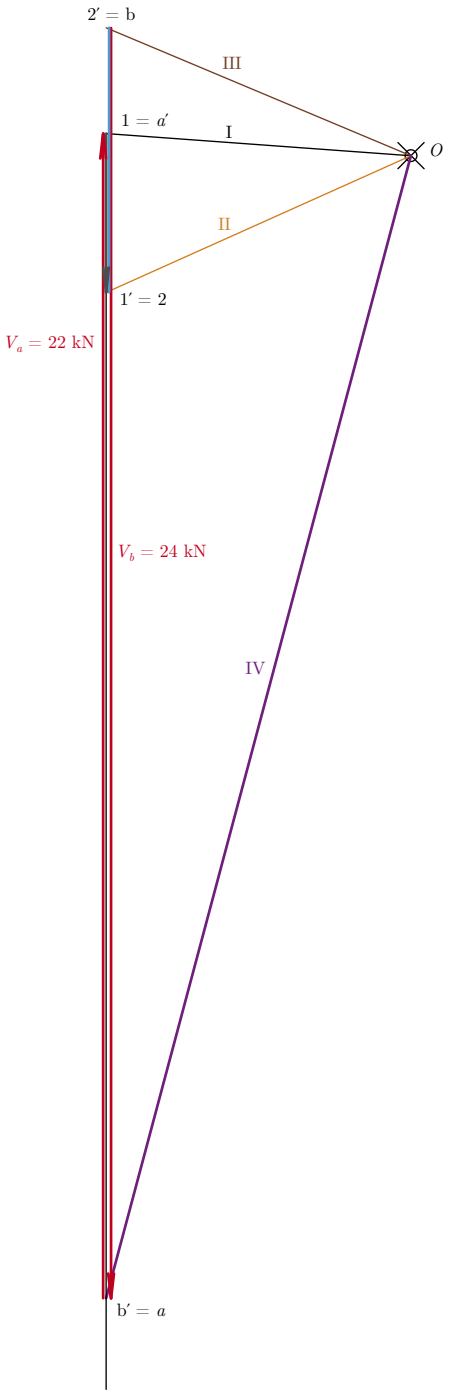


Grafické řešení

a) výslednicová čára



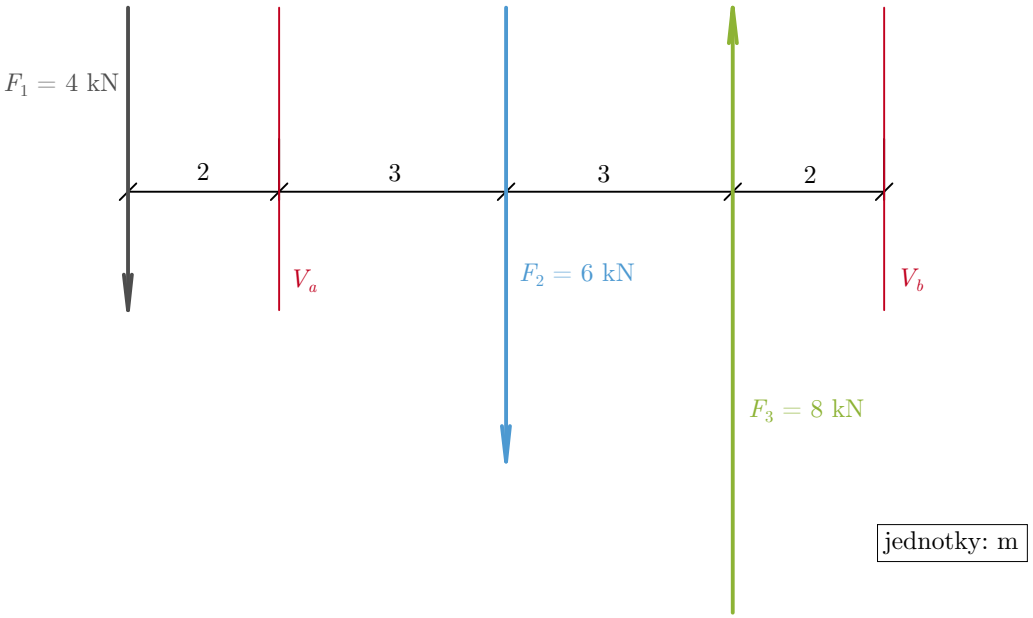
b) složková čára



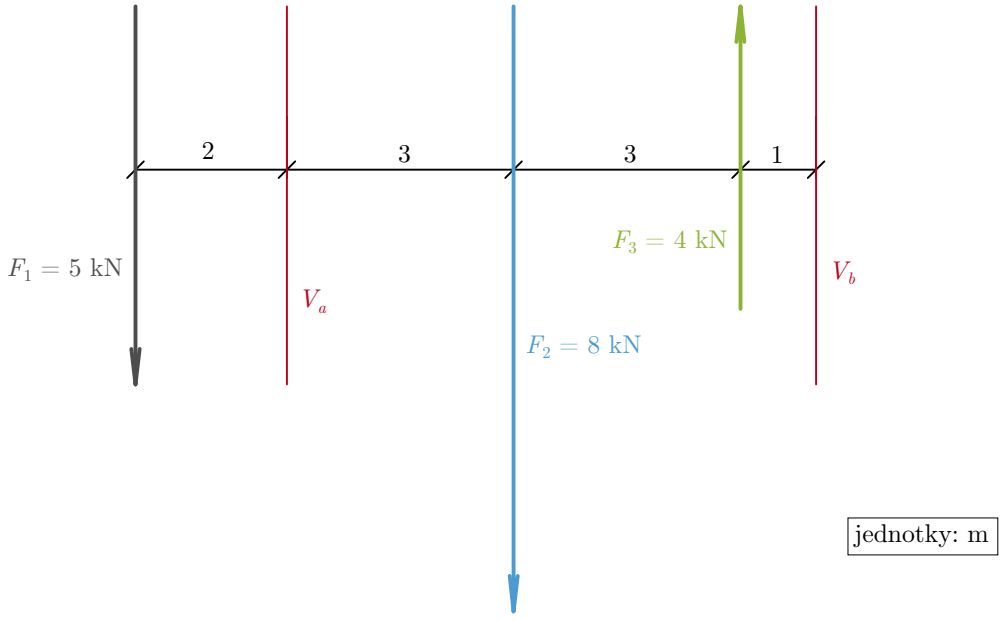
Příklady k procvičení

Uveďte soustavu rovnoběžných sil do rovnováhy pomocí dvou sil V_a a V_b, jejichž poloha je dána. Určete jak jejich velikost, tak jejich smysl.

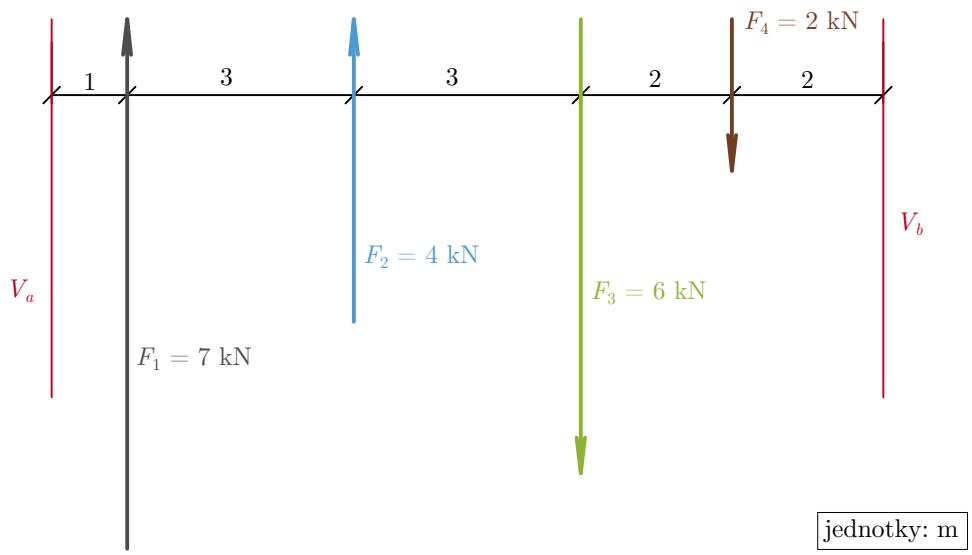
3.3.A



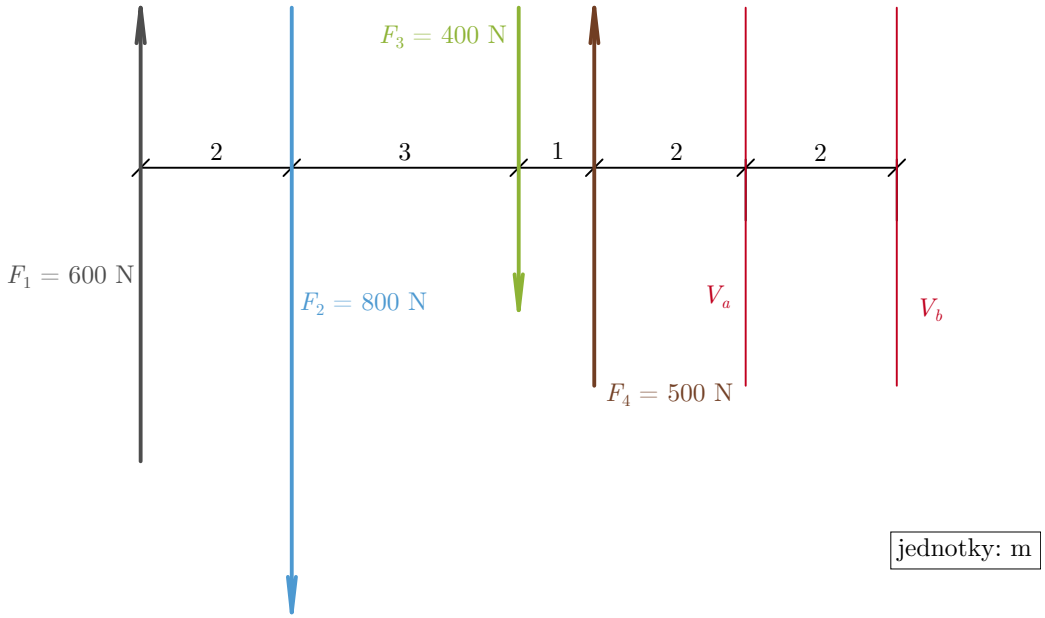
3.3.B



3.3.C



3.3.D



3.4 Rovnováha obecné soustavy sil v rovině

Princip řešení je stále stejný. Pokud má být soustava sil v rovnováze, je nutné, aby splňovala podmínky rovnováhy.

Pro názornost si představme, že obecná soustava sil působí na nosníku, jehož osu si budeme schematicky znázorňovat vodorovnou čarou. Místa, kde působí síly, které dávají soustavu sil do rovnováhy, si představme jako místa podpor nosníku (např. stěny).

Dohodněme se také na značení. Síly kolmé k ose nosníku budeme označovat V, síly působící v ose nosníku označíme N a síly v obecné poloze ponecháme označeny jako reakce R. Všechny síly budou mít vždy dolní index dle označení místa působení (podpory).

Omezíme se pouze na početní řešení, které je rychlejší a přesnější.

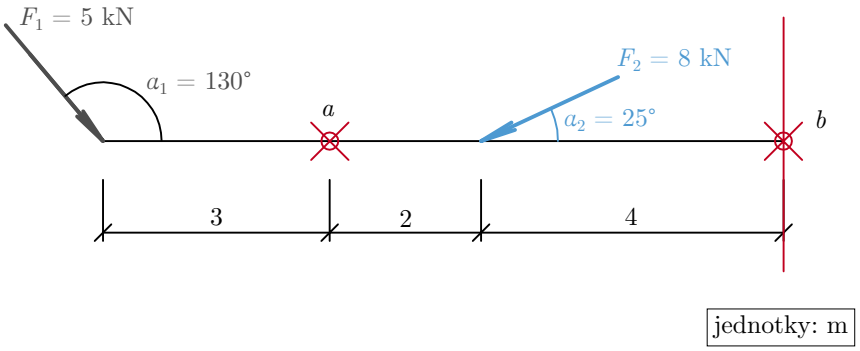
Příklad:

Uveďte soustavu rovnoběžných sil do rovnováhy pomocí dvou sil, u kterých znáte buď místo působení nebo působiště i paprsek.

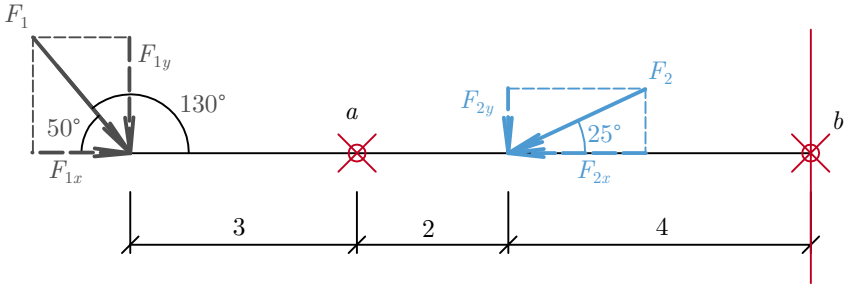
Je dáno působiště a, působiště b a paprsek síly.

Příklad 3.4.1

Zadání:



Rozložení sil:



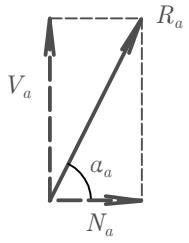
$$
\begin{aligned}
F_{1x} &= 5\cos 50° = 3,214\,\text{kN} \\
F_{1y} &= 5\sin 50° = 3,83\,\text{kN} \\
F_{2x} &= 8\cos 25° = 7,25\,\text{kN} \\
F_{2y} &= 8\sin 25° = 3,381\,\text{kN}
\end{aligned}
$$

Podmínky rovnováhy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
F_{1y}r_1 + F_{2y}r_2 + V_b r_b &= 0 \\
-3,83 \cdot 3 + +3,381 \cdot 2 + V_b \cdot 6 &= 0 \\
V_b &= 0,788\,\text{kN} \curvearrowright
\end{aligned}$$

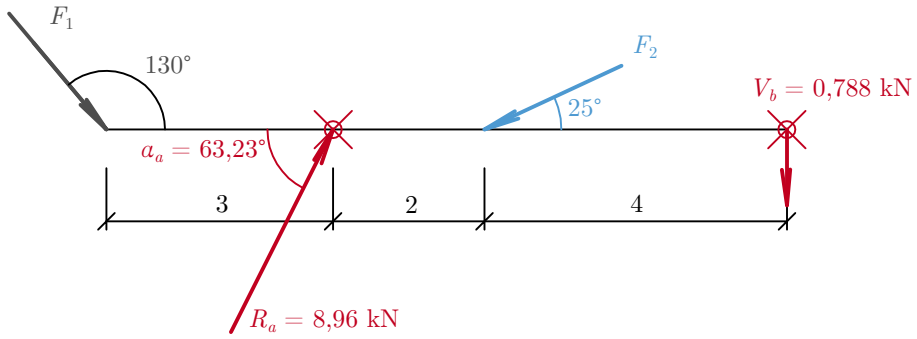
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\
F_{1y} + F_{2y} + V_a + V_b &= 0 \\
-3,83 + V_a - 3,381 - 0,788 &= 0 \\
V_a &= 7,999\,\text{kN} \uparrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\
F_{1x} - F_{2x} + N_a &= 0 \\
3,214 - 7,25 + N_a &= 0 \\
N_a &= 4,036\,\text{kN} \rightarrow
\end{aligned}$$



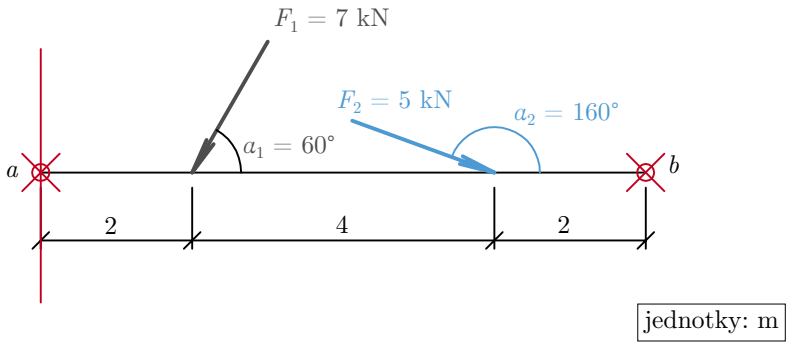
$$\begin{aligned}
R_a &= \sqrt{V_a^2 + N_a^2} = \sqrt{7,999^2 + 4,036^2} = 8,96\,\text{kN} \\
\tan\alpha_R &= \frac{V_a}{N_a} = \frac{7,999}{4,036} = 1,982 \\
\alpha_R &= 63,23^\circ
\end{aligned}$$

Zakreslení výsledků do zadání

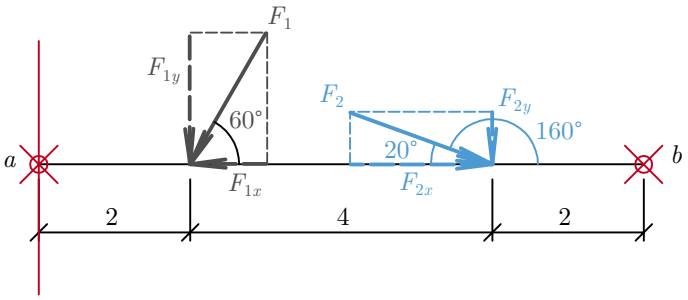


Příklad 3.4.2

Je dán paprsek a působiště a a působiště b.



Rozložení sil:

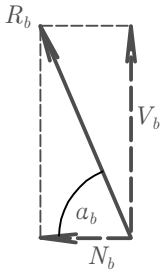


$$
\begin{aligned}
F_{1x} &= 7\cos 60° = 3,5\,\text{kN} \\
F_{1y} &= 7\sin 60° = 6,062\,\text{kN} \\
F_{2x} &= 5\cos 20° = 4,698\,\text{kN} \\
F_{2y} &= 5\sin 20° = 1,71\,\text{kN}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\
V_a r_a + F_{1y} r_1 + F_{2y} r_2 &= 0 \\
V_a \cdot 8 - 6,062 \cdot 6 - 1,71 \cdot 2 &= 0 \\
V_a &= 4,974\,\text{kN} \curvearrowright
\end{aligned}$$

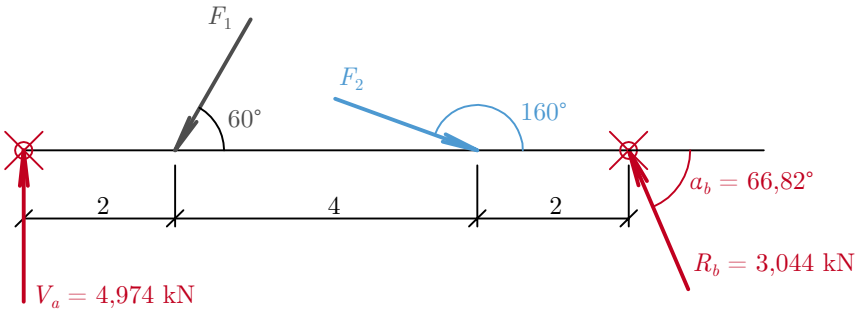
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\
V_a + F_{1y} + F_{2y} + V_b &= 0 \\
4,974 - 6,062 - 1,71 + V_b &= 0 \\
V_b &= 2,798\,\text{kN} \uparrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\
F_{1x} + F_{2x} + N_b &= 0 \\
-3,5 + 4,698 + N_b &= 0 \\
N_b &= -1,198\,\text{kN} \leftarrow
\end{aligned}$$



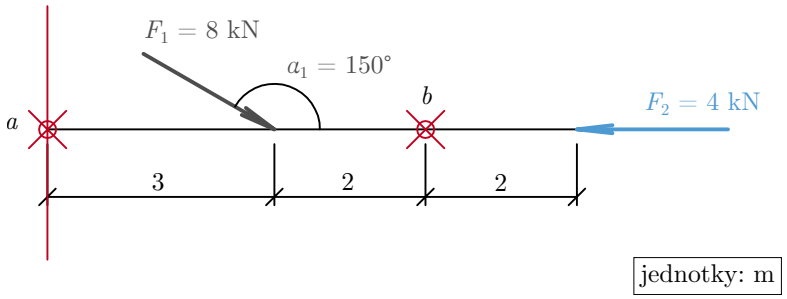
$$\begin{aligned}
R_b &= \sqrt{V_b^2 + N_b^2} = \sqrt{2,798^2 + (-1,198)^2} = 3,044\,\text{kN} \\
\tan \alpha_R &= \frac{V_b}{N_b} = \frac{2,798}{-1,198} = -2,336 \\
\alpha_R &= -66,82^\circ
\end{aligned}$$

Zakreslení výsledků do zadání

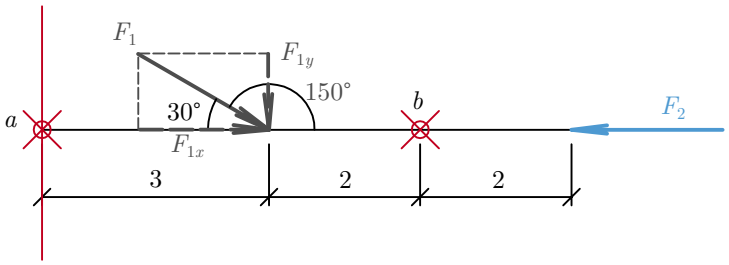


Příklad 3.4.3

Je dáno působiště a a paprsek síly, která působištěm a prochází. Je dáno působiště b.



Rozložení síly:

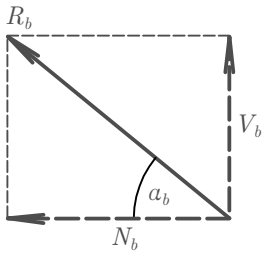


$$\begin{aligned} F_{1x} &= 8\cos 30° = 6,928\,\text{kN} \\ F_{1y} &= 8\sin 30° = 4\,\text{kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\ V_a r_a + F_{1y} r_1 &= 0 \\ V_a \cdot 5 - 4 \cdot 2 &= 0 \\ V_a &= 1,6\,\text{kN} \curvearrowright \end{aligned}$$

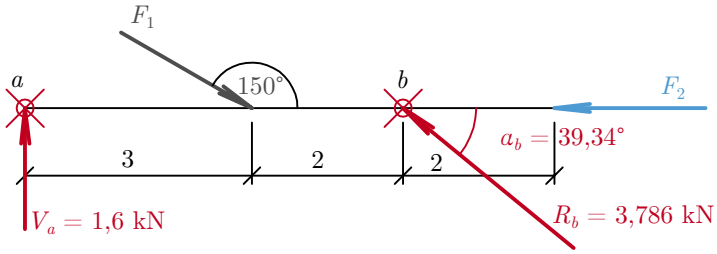
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0\\ V_a + F_{1y} + V_b &= 0\\ 1,6 - 4 + V_b &= 0\\ V_b &= 2,4\,\text{kN}\uparrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0\\ F_{1x} + N_b + F_2 &= 0\\ 6,928 + N_b - 4 &= 0\\ N_b &= -2,928\,\text{kN}\leftarrow\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}R_b &= \sqrt{V_b^2 + N_b^2} = \sqrt{2,4^2 + (-2,928)^2} = 3,786\,\text{kN}\\ \tan\alpha_R &= \frac{V_b}{N_b} = \frac{2,4}{-2,928} = -0,82\\ \alpha_R &= -39,34^\circ\end{aligned}$$

Zakreslení výsledků do zadání

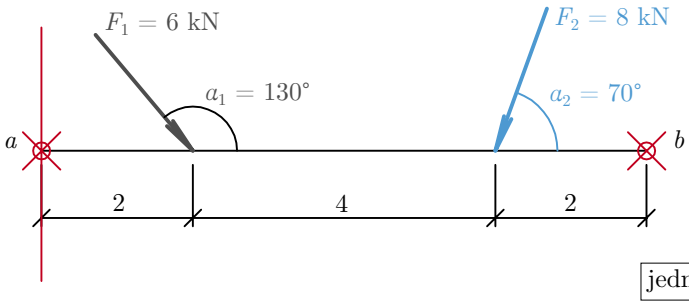


Příklady k procvičení

Uveďte obecnou soustavu sil do rovnováhy.

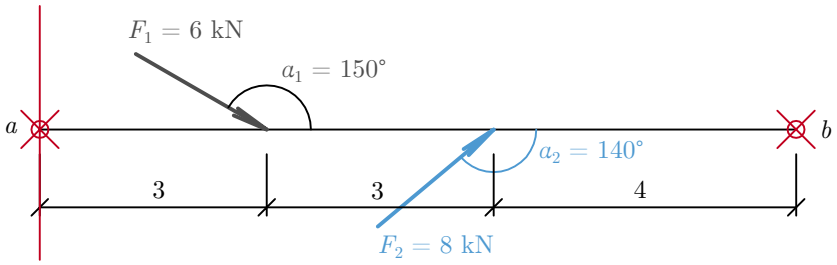
Je dán paprsek a působiště a a působiště b.

3.4.A



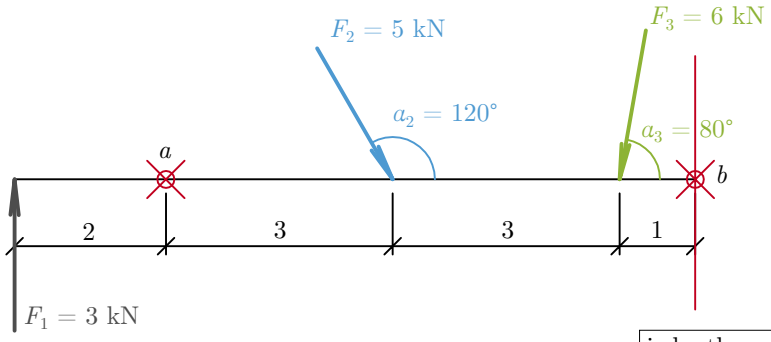
jednotky: m

3.4.B



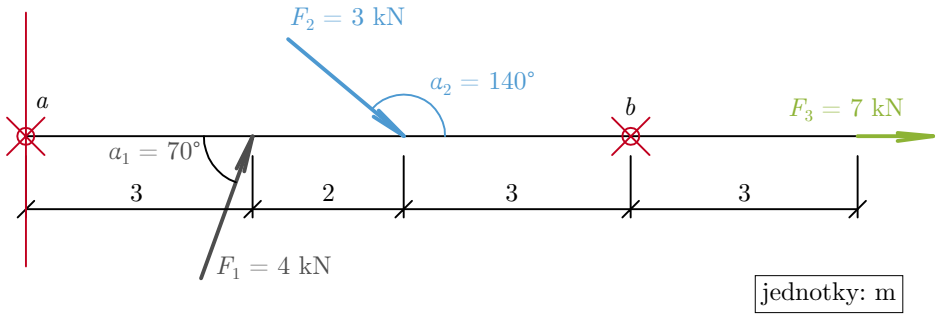
jednotky: m

3.4.C



jednotky: m

3.4.D



3.5 Rozklad síly do dvou rovnoběžných směrů

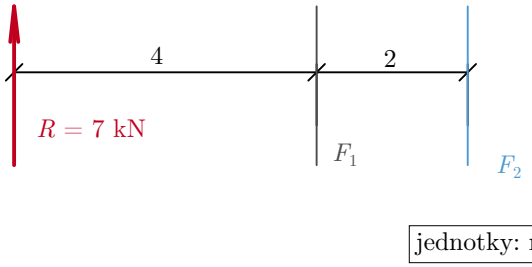
Při rozkladu síly vycházíme ze stejných pravidel jako pro skládání sil, přičemž

- při početním řešení nejlépe volíme momentový střed na jedné z neznámých sil,
- při grafickém řešení se pravidla nemění. Opět platí, že jak složková čára, tak výslednicová čára, musí být uzavřena.

Poznámka: Pro obecný rozklad síly v rovině máme z hlediska početního řešení k dispozici tři rovnice, proto je tedy jednoznačný pouze rozklad síly do tří složek daných určovacími paprsky, které se neprotínají v jednom bodě. Tzn. že rozklad do dvou složek nemá řešení a do čtyř a více složek je mnohoznačný.

Příklad 3.5.1

Rozložte výslednici dvou rovnoběžných sil R do těchto dvou sil, jejichž poloha je známa. (Rovnoběžné síly označujeme F_1 a F_2).



Početní řešení:

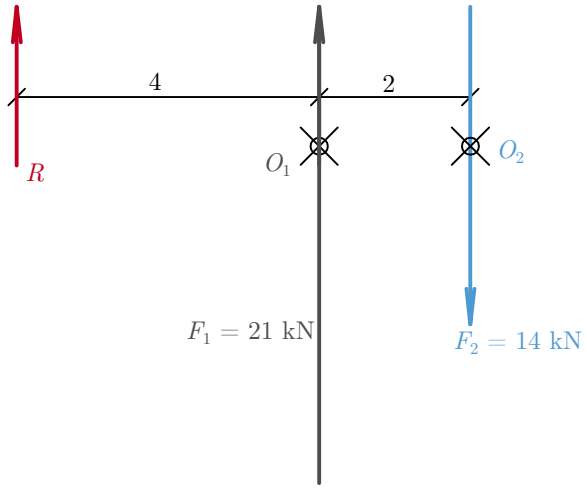
Zvolím si momentový střed O_1 na síle F_1 a vypočítám sílu F_2 pomocí momentové podmínky

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} M_i &= M_R \\ F_2 r_2 &= Rr \\ F_2 \cdot 2 &= 7 \cdot 4 \\ F_2 &= 14\,\text{kN} \curvearrowright\end{aligned}$$

Zvolíme si momentový střed O_2 na síle F_2 a obdobným způsobem vypočítáme sílu F_1.

$$\begin{aligned}F_1 r_1 &= Rr \\ F_1 \cdot 2 &= 7 \cdot 6 \\ F_1 &= 21\,\text{kN} \curvearrowright\end{aligned}$$

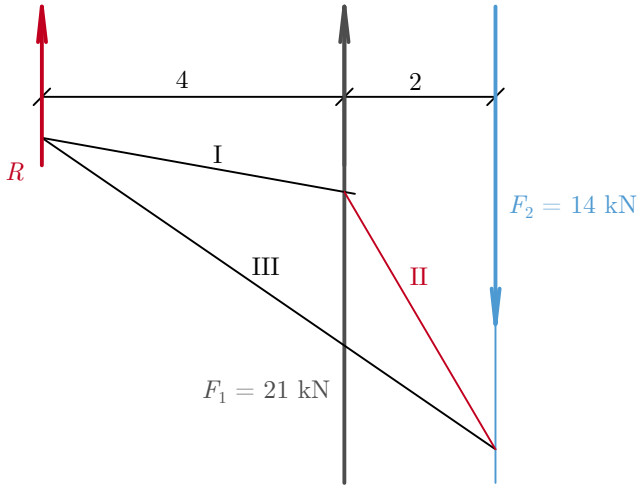
Zakreslení výsledků do zadání



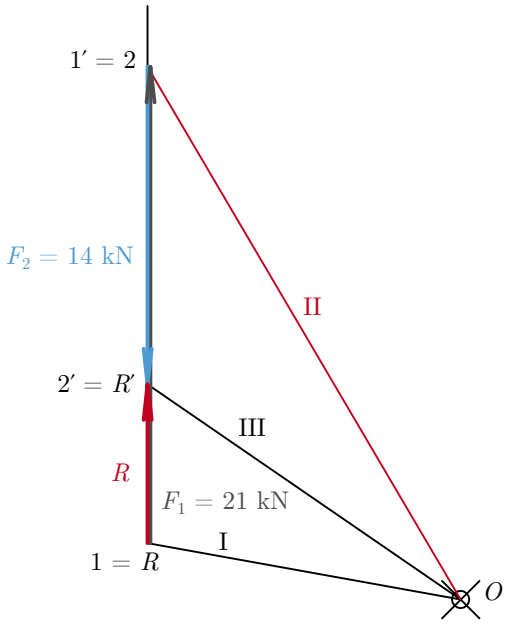
Grafické řešení:

a) výslednicová čára

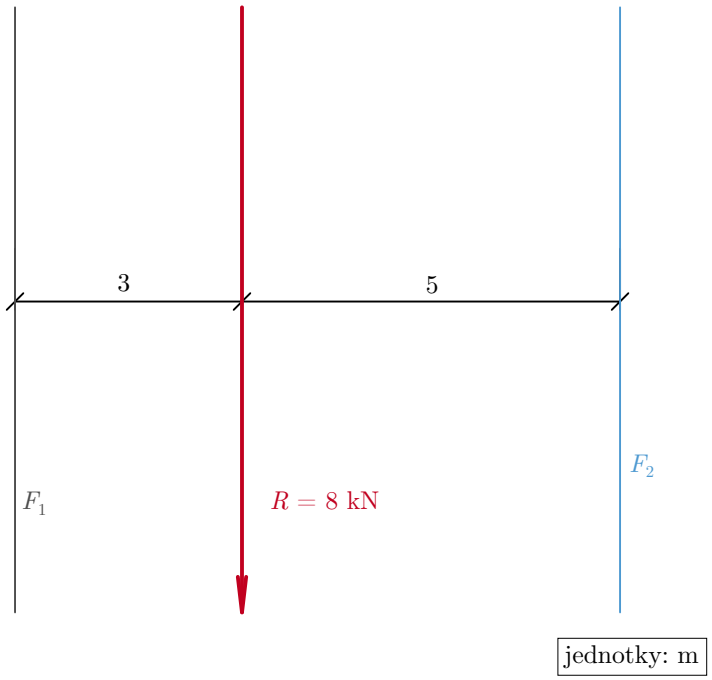
Známe pólové paprsky I a III. Paprsek II určíme až z výslednicového obrazce.



b) složková čára



Příklad 3.5.2

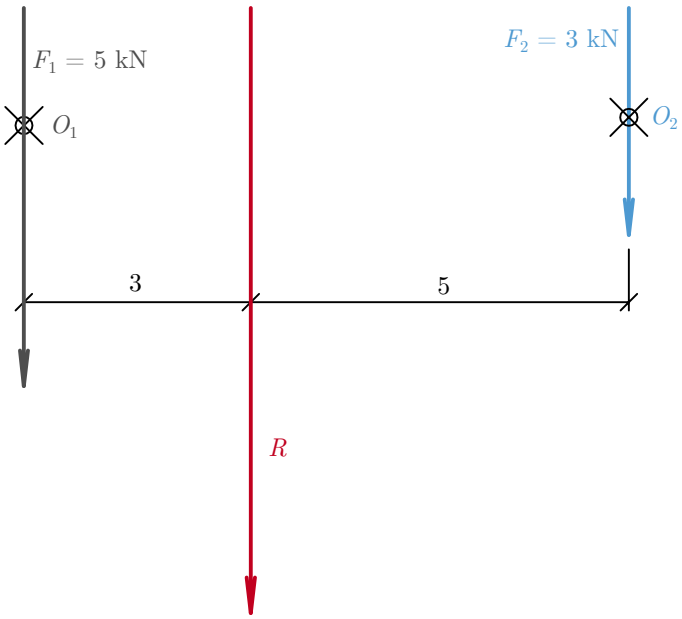


Početní řešení:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_i &= M_R \\ F_2 r_2 &= Rr \\ F_2 \cdot 8 &= 8 \cdot 3 \\ F_2 &= 3\,\text{kN} \curvearrowright \end{aligned}$$

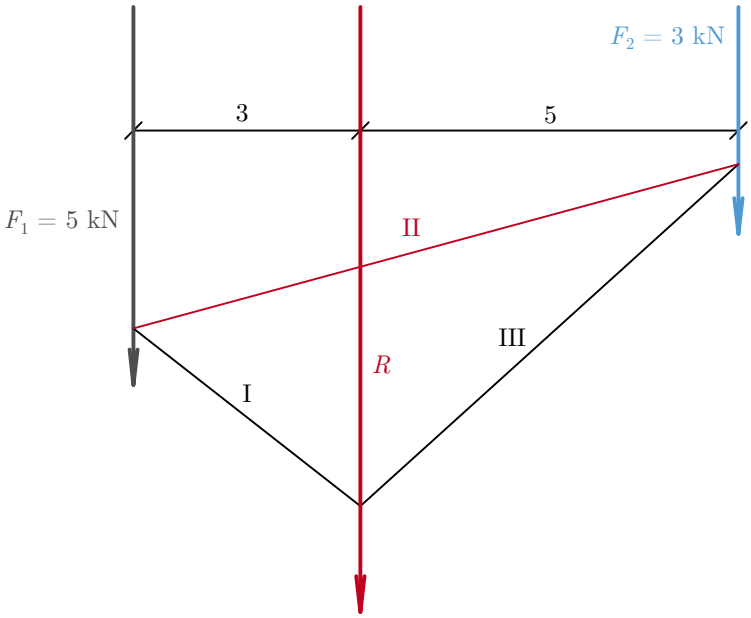
$$\begin{aligned} F_1 r_1 &= Rr \\ F_1 \cdot 5 &= 8 \cdot 2 \\ F_1 &= 3,2\,\text{kN} \curvearrowright \end{aligned}$$

Zakreslení výsledků do zadání

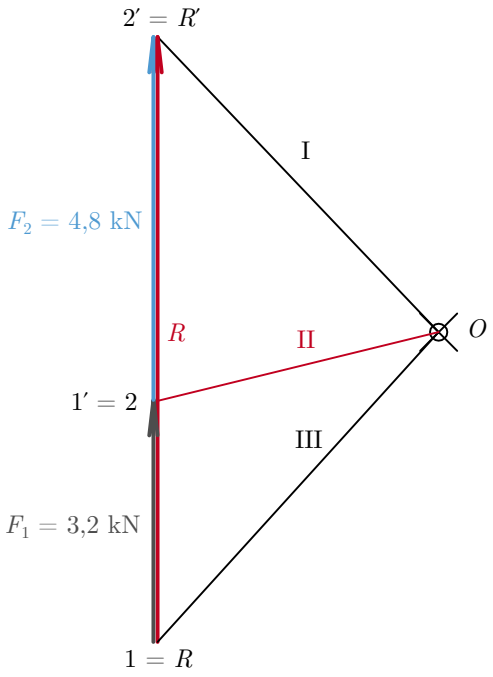


Grafické řešení

a) výslednicová čára

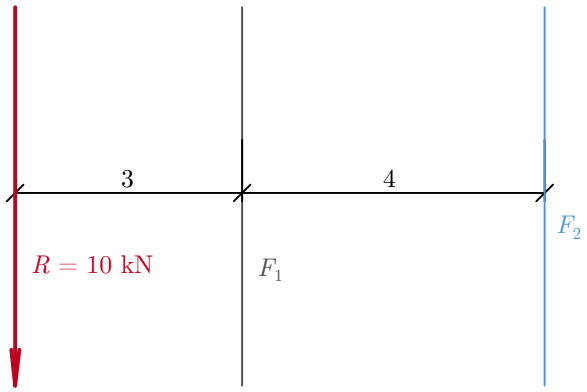


b) složková čára



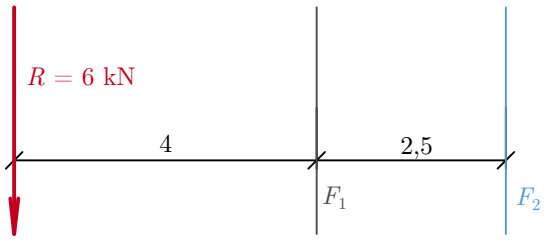
Příklady k procvičení

3.5.A



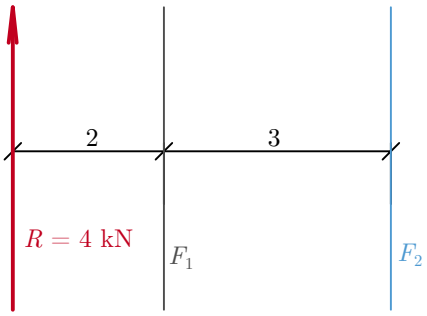
jednotky: m

3.5.B



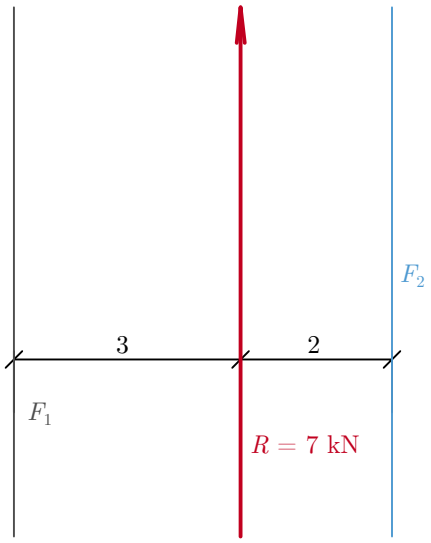
jednotky: m

3.5.C



jednotky: m

3.5.D



jednotky: m

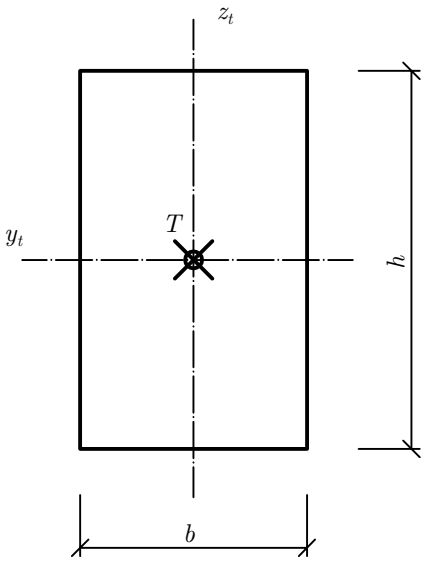
4 Těžiště ploch rovinných obrazců a statické veličiny průřezu

V hodinách stavební mechaniky jste se seznámili s definicí a významem výpočtu těžiště a statických veličin průřezu jako je:

- moment setrvačnosti I (I_y, I_z) $\left[m^4\right]$,
- průřezový modul W $(W_{yh}, W_{yd}, W_{zl}, W_{zp})$ $\left[m^3\right]$,
- poloměr setrvačnosti i (i_y, i_z) $[m]$.

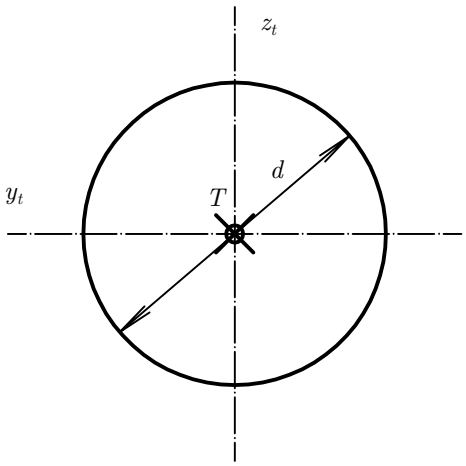
Zkusme si zapamatovat alespoň vzorce pro výpočet I, W a i u základních obrazců k jejich těžišťovým osám.

Obdélník – velmi používaný tvar ve stavebních konstrukcích!!!



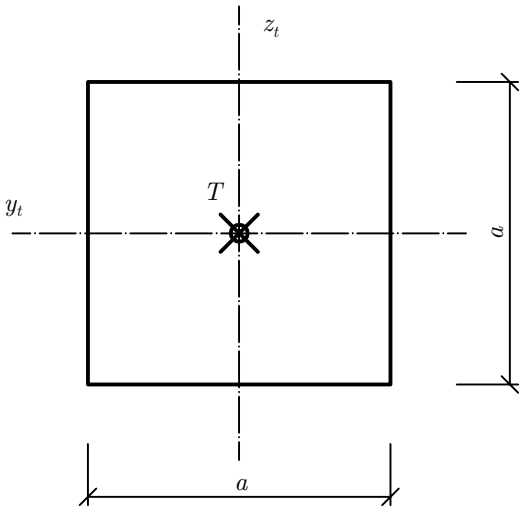
$$
\begin{aligned}
I_y &= \frac{1}{12}bh^3 \\
I_z &= \frac{1}{12}b^3h \\
W_{yd} = W_{yh} &= \frac{1}{6}bh^2 \\
W_{zl} = W_{zp} &= \frac{1}{6}b^2h \\
i_y &= \frac{1}{\sqrt{12}}h \\
i_z &= \frac{1}{\sqrt{12}}b
\end{aligned}
$$

Kruh



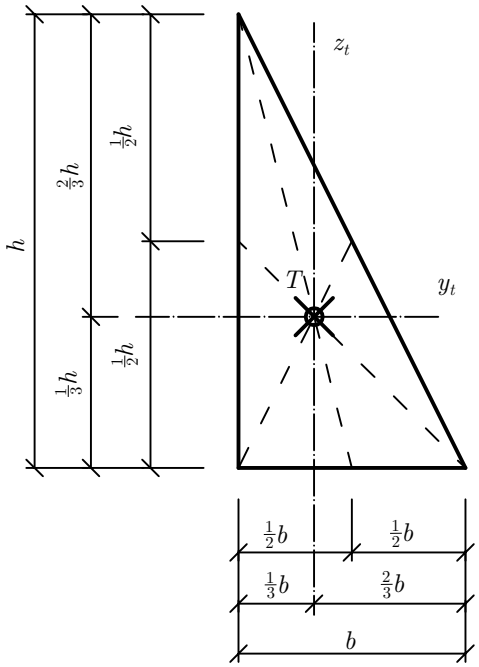
$$
\begin{aligned}
I_y = I_z &= \frac{1}{64}\pi d^4 \\
W_{yd} = W_{yh} = W_{zl} = W_{zp} &= \frac{1}{32}\pi d^3 \\
i_y = i_z &= \frac{1}{4}d
\end{aligned}
$$

Čtverec



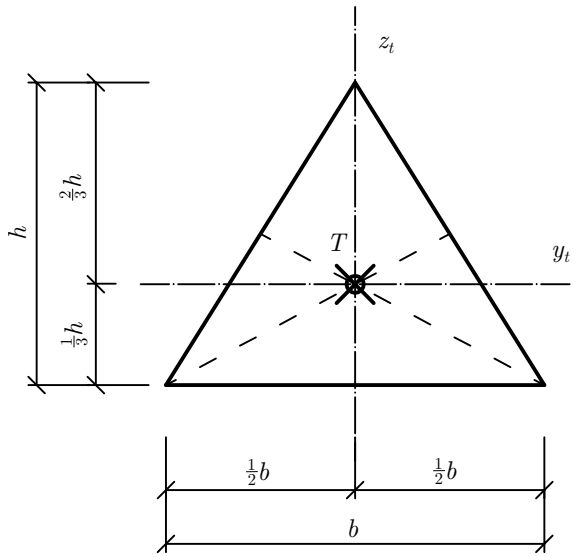
$$
\begin{aligned}
I_y = I_z &= \frac{1}{12}a^4 \\
W_{yd} = W_{yh} = W_{zl} = W_{zp} &= \frac{1}{6}a^3 \\
i_y = i_z &= \frac{1}{\sqrt{12}}a
\end{aligned}
$$

Pravoúhlý trojúhelník



$$
\begin{aligned}
I_y &= \frac{1}{36}bh^3 \\
I_z &= \frac{1}{36}b^3h \\
W_{yd} &= \frac{1}{12}bh^2 \\
W_{yh} &= \frac{1}{24}bh^2 \\
W_{zl} &= \frac{1}{12}b^2h \\
W_{zp} &= \frac{1}{24}b^2h \\
i_y &= \frac{1}{\sqrt{18}}h \\
i_z &= \frac{1}{\sqrt{18}}b
\end{aligned}
$$

Rovnoramenný trojúhelník



$$
\begin{aligned}
I_y &= \frac{1}{36} b h^3 \\
I_z &= \frac{1}{48} b^3 h \\
W_{yd} &= \frac{1}{12} b h^2 \\
W_{yh} &= \frac{1}{24} b h^2 \\
W_{zl} = W_{zp} &= \frac{1}{24} b^2 h \\
i_y &= \frac{1}{\sqrt{18}} h \\
i_z &= \frac{1}{\sqrt{24}} b
\end{aligned}
$$

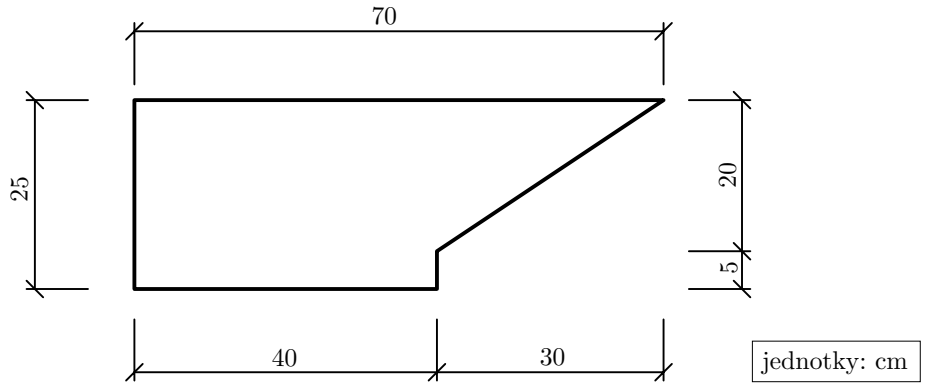
Víme také, že pokud počítáme průřezové charakteristiky průřezu, který není základní, ale je složený z více základních obrazců, pak můžeme s výhodou využít Steinerovy věty:

Moment setrvačnosti složeného průřezu k těžišti je součet součtu momentů setrvačnosti základních obrazců k vlastnímu těžišti I_i a součinu plochy základního obrazce A_i a druhé mocniny vzdálenosti jejich těžištní osy k těžištní ose celého průřezu.

$$
\begin{aligned}
I_y &= \sum_{i=1}^{n} \left(I_{yi} + A_i \cdot dz_i^2 \right) \\
I_z &= \sum_{i=1}^{n} \left(I_{zi} + A_i \cdot dy_i^2 \right)
\end{aligned}
$$

Příklad 4.1

Vypočítejte těžiště a všechny průřezové charakteristiky tohoto průřezu.



1) Rozdělíme průřez na základní tvary a očíslujeme.

2) Zvolíme pomocné osy y a z.

3) Připravíme si pomocnou tabulku pro lepší přehlednost. Tu postupně doplňujeme.

	plocha	souřadnice těžiště		momenty setrvačnosti		vzdálenost těžiště základního obrazce od těžiště průřezu	
č.	A [cm^2]	y [cm]	z [cm]	I_y [cm^4]	I_z [cm^4]	dy [cm]	dz [cm]
1.	$40 \cdot 25 =$ 1 000	20	12,5				
2.	$\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 20 =$ 300	50	$18,\overline{3}$				
$\sum$	1 300						

4) Vypočítám těžiště průřezu a zakreslíme do zadání, včetně dopočítání vzdáleností krajních vláken

$$y_t = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A} = \frac{1\,000 \cdot 20 + 300 \cdot 50}{1\,300} = 26,923\,\text{cm}$$
$$z_t = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A} = \frac{1\,000 \cdot 12,5 + 300 \cdot 18,\overline{3}}{1\,300} = 13,846\,\text{cm}$$

!Pozor! Nezapomeňte, že souřadnice y_t nám určuje polohu těžišťové osy z a souřadnice $z_t$nám určuje polohu těžišťové osy y.

5) Dopočítáme si vzdálenosti těžiště složeného průřezu k těžišti základního obrazce d_y a d_z. (Na znaménku nezáleží, budeme počítat s druhou mocninou této vzdálenosti.) Nyní spočítáme průřezové charakteristiky.

Steinerova věta:

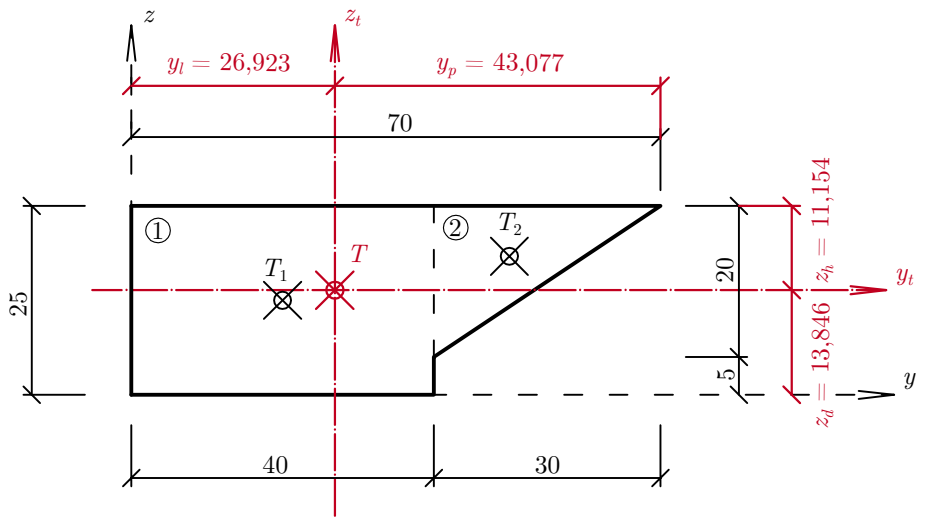
$$I_y = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{yi} + A_i \cdot dz_i^2\right) = 52\,083,\overline{3} + 1\,000 \cdot 1,346^2 + 6666,\overline{6} + 300 \cdot 4,487^2$$
$$= 58\,750 + 1\,811,716 + 6\,039,951 = 66\,601,667\,\text{cm}^4$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{zi} + A_i \cdot dy_i^2\right) = 133\,333,\overline{3} + 1\,000 \cdot 6,923^2 + 15\,000 + 300 \cdot 23,077^2$$
$$= 148\,333,\overline{3} + 47\,927,929 + 159\,764,38 = 356\,025,64\,\text{cm}^4$$

č.	plocha A [cm^2]	souřadnice těžiště y [cm]	z [cm]	momenty setrvačnosti I_y [cm^4]	I_z [cm^4]	vzdálenost těžiště základního obrazce od těžiště průřezu dy [cm]	dz [cm]
1.	$40{\cdot}25{=}$ $1\,000$	20	12,5	$\frac{1}{12}{\cdot}40{\cdot}25^3{=}$ $52\,083,\overline{3}$	$\frac{1}{12}{\cdot}40^3{\cdot}25{=}$ $133\,333,\overline{3}$	$26{,}923{-}20{=}$ $6,923$	$13{,}846{-}12{,}5{=}$ $1,346$
2.	$\frac{1}{2}{\cdot}30{\cdot}20{=}$ 300	50	$18,\overline{3}$	$\frac{1}{36}{\cdot}30{\cdot}20^2{=}$ $6\,666,\overline{6}$	$\frac{1}{36}{\cdot}30^3{\cdot}20{=}$ $15\,000$	$26{,}923{-}50{=}$ $23,077$	$13{,}846{-}18{,}\overline{3}{=}$ $4,487$
$\sum$	$1\,300$			$58\,750$	$148\,333,\overline{3}$		

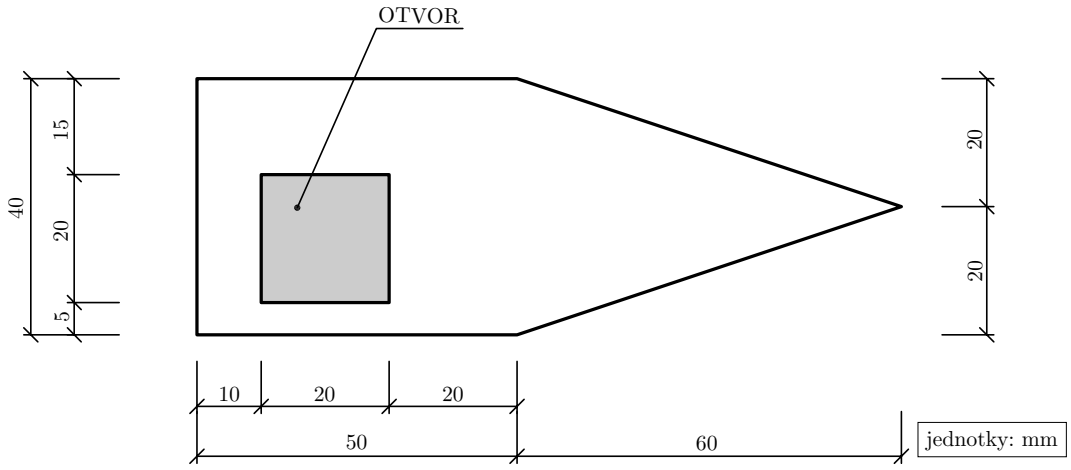
$$W_{yd} = \frac{I_y}{z_d} = \frac{66\,601,667}{13,846} = 4\,810,2\,\text{cm}^3$$
$$W_{yh} = \frac{I_y}{z_h} = \frac{66\,601,667}{11,154} = 5\,971,1\,\text{cm}^3$$
$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{66\,601,667}{1\,300}} = 7,16\,\text{cm}$$

$$W_{zl} = \frac{I_z}{y_l} = \frac{356\,025,64}{26,923} = 13\,223,85\,\text{cm}^3$$
$$W_{zp} = \frac{I_z}{y_p} = \frac{356\,025,64}{43,077} = 8\,264,87\,\text{cm}^3$$
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{356\,025,64}{1\,300}} = 16,55\,\text{cm}$$



Příklad 4.2

Vypočtěte těžiště a všechny průřezové charakteristiky tohoto průřezu s čtvercovým otvorem (vyšrafovaná část).



Tento příklad má dva zádrhele, na které je potřeba si dát pozor:

1. rovnoramenný trojúhelník má otočené osy ⇒hodnoty I_y a I_z,
2. otvor se vždy od průřezu odečítá.

č.	plocha A [mm^2]	souřadnice těžiště y [mm]	z [mm]	momenty setrvačnosti I_y [mm^4]	I_z [mm^4]	vzdálenost těžiště základního obrazce od těžiště průřezu dy [mm]	dz [mm]
1.	$50{\cdot}40=$ $2\,000$	25	20	$\frac{1}{12}{\cdot}50{\cdot}40^3=$ $266\,666,\overline{6}$	$\frac{1}{12}{\cdot}50^3{\cdot}40=$ $416\,666,\overline{6}$	$45-25=$ 20	$20{,}71-20=$ $0,71$
2.	$\frac{1}{2}{\cdot}60{\cdot}40=$ $1\,200$	70	20	$\frac{1}{48}{\cdot}60{\cdot}40^3=$ $80\,000$	$\frac{1}{36}{\cdot}60^3{\cdot}40=$ $240\,000$	$45-70=$ -25	$20{,}71-20=$ $0,71$
3.	$20^2=$ 400	20	15	$-\frac{1}{12}{\cdot}20^4=$ $-13\,333,\overline{3}$	$-\frac{1}{12}{\cdot}20^4=$ $-13\,333,\overline{3}$	$45-20=$ 25	$20{,}71-15=$ $5,71$
$\sum$	$2000+1200$ $-400=$ $2\,800$			$333\,333,\overline{3}$	$643\,333,\overline{3}$		

$$y_t = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 - A_3 \cdot y_3}{A} = \frac{2\,000 \cdot 25 + 1\,200 \cdot 70 - 400 \cdot 20}{2\,800} = 45\,\text{mm}$$

$$z_t = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 - A_3 \cdot z_3}{A} = \frac{2\,000 \cdot 20 + 1\,200 \cdot 20 - 400 \cdot 15}{2\,800} = 20,71\,\text{mm}$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{yi} + A_i \cdot dz_i^2 \right) = 333\,333,\overline{3} + 2\,000 \cdot 0,71^2 + 1\,200 \cdot 0,71^2 - 400 \cdot 5,71^2$$

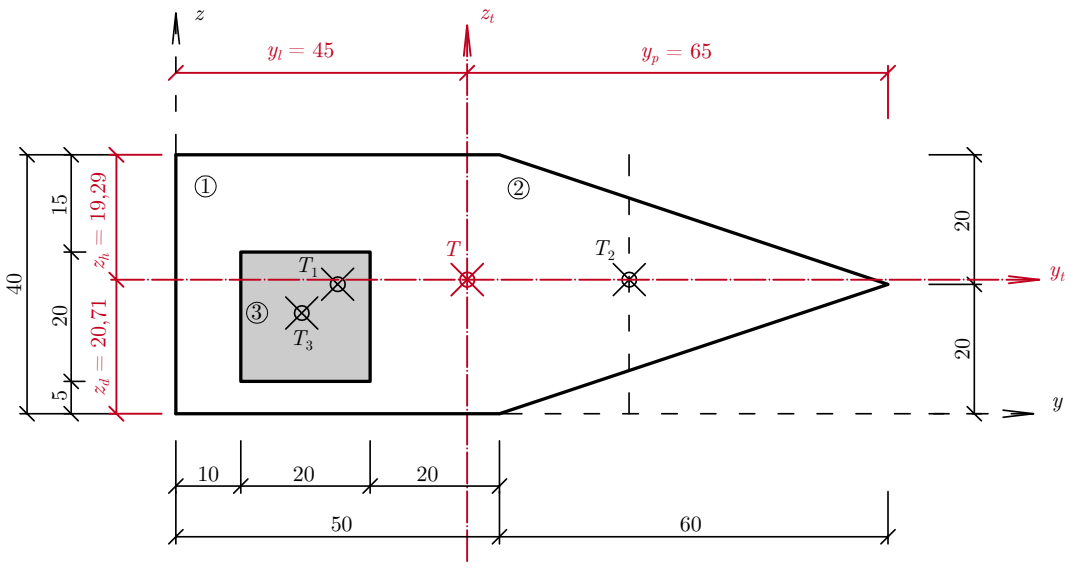
$$= 321\,904,81\,\text{mm}^4$$

$$\begin{aligned} W_{yd} &= \frac{I_y}{z_d} = \frac{321\,904,81}{20,71} = 15\,543,45\,\text{mm}^3 \\ W_{yh} &= \frac{I_y}{z_h} = \frac{321\,904,81}{19,29} = 16\,687,65\,\text{mm}^3 \\ i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{321\,904,81}{2\,800}} = 10,72\,\text{mm} \end{aligned}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{zi} + A_i \cdot dy_i^2 \right) = 643\,333,\overline{3} + 2\,000 \cdot 20^2 + 1\,200 \cdot 25^2 - 400 \cdot 25^2$$

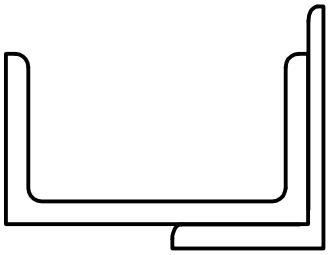
$$= 1\,943\,333,3\,\text{mm}^4$$

$$\begin{aligned} W_{zl} &= \frac{I_z}{y_l} = \frac{1\,943\,333,3}{45} = 43\,185,184\,\text{mm}^3 \\ W_{zp} &= \frac{I_z}{y_p} = \frac{1\,943\,333,3}{65} = 29\,897,435\,\text{mm}^3 \\ i_z &= \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1\,943\,333,3}{2\,800}} = 26,34\,\text{mm} \end{aligned}$$



Příklad 4.3

Vypočítejte těžiště a všechny průřezové charakteristiky tohoto průřezu.



Uč. 200
Lč. 160/100/14

Pokud je průřez složený z válcovaných profilů, pak jejich momenty setrvačnosti k vlastní těžištní ose najdeme ve statických tabulkách. Opět je potřeba dávat pozor, zda nejsou otočeny osy oproti osám v tabulkách!

1. Rozdělíme průřez na základní válcované průřezy a očíslujeme.
2. Zvolíme pomocné osy y a z.
3. Najdeme si v tabulkách všechny potřebné rozměry a okótujeme do zadání.
4. Najdeme si v tabulkách všechny potřebné veličiny (A, I_y, I_z) a zapíšeme do tabulky.
5. Vypočítáme těžiště průřezu a zakreslíme do zadání včetně dopočítání vzdáleností krajních vláken od těžiště průřezu.
6. Dopočítáme zbývající průřezové charakteristiky pomocí Steinerovy věty.

	plocha	souřadnice těžiště		momenty setrvačnosti		vzdálenost těžiště základního obrazce od těžiště průřezu	
č.	A [mm^2]	y [mm]	z [mm]	I_y [mm^4]	I_z [mm^4]	dy [mm]	dz [mm]
1.	3 220	-114	$34,1$	$1\,480 \cdot 10^3$	$19,1 \cdot 10^6$	67,54−114= $-46,46$	44,41−34,1= $10,31$
2.	3 460	$-24,3$	54	$8\,917 \cdot 10^3$	$2\,695 \cdot 10^3$	67,54−24,3= $43,24$	44,41−54= $-9,59$
$\sum$	6 680			10 397 000	21 795 000		

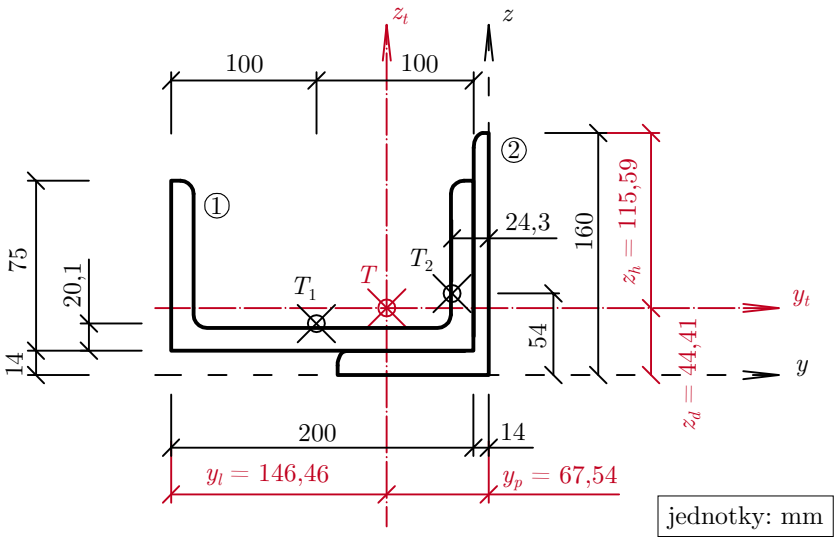
$$y_t = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A} = \frac{3\,200 \cdot (-114) + 3\,460 \cdot (-24,3)}{6680} = -67,54\,\text{mm}$$
$$z_t = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A} = \frac{3\,220 \cdot 34,1 + 3\,460 \cdot 54}{6\,680} = 44,41\,\text{mm}$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{yi} + A_i \cdot dz_i^2\right) = 10\,397\,000 + 3\,220 \cdot 10,31^2 + 3\,460 \cdot 9,59^2 = 11\,057\,483\,\text{mm}^4$$

$$
\begin{aligned}
W_{yd} &= \frac{I_y}{z_d} = \frac{11\,057\,483}{44,41} = 248\,986,33\,\text{mm}^3 \\
W_{yh} &= \frac{I_y}{z_h} = \frac{11\,057\,483}{115,59} = 95\,661,24\,\text{mm}^3 \\
i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{11\,057\,483}{6\,680}} = 40,69\,\text{mm}
\end{aligned}
$$

$$
I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{zi} + A_i \cdot dy_i^2\right) = 21\,795\,000 + 3\,220 \cdot 46,46^2 + 3\,460 \cdot 43,24^2 = 35\,214\,625\,\text{mm}^4
$$

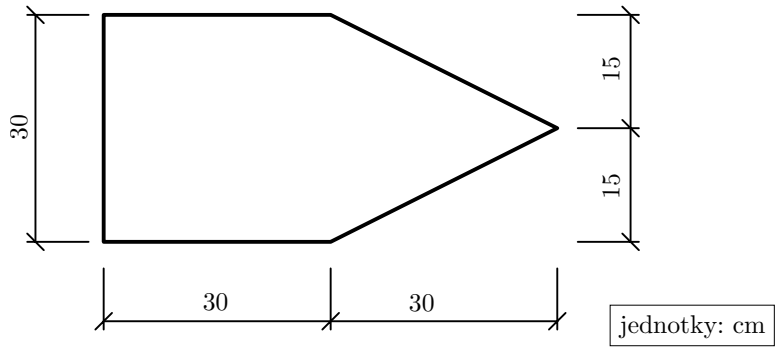
$$
\begin{aligned}
W_{zl} &= \frac{I_z}{y_l} = \frac{35\,214\,625}{146,46} = 240\,438,52\,\text{mm}^3 \\
W_{zp} &= \frac{I_z}{y_p} = \frac{35\,214\,625}{67,54} = 521\,389,18\,\text{mm}^3 \\
i_z &= \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{35\,214\,625}{6\,680}} = 72,61\,\text{mm}
\end{aligned}
$$



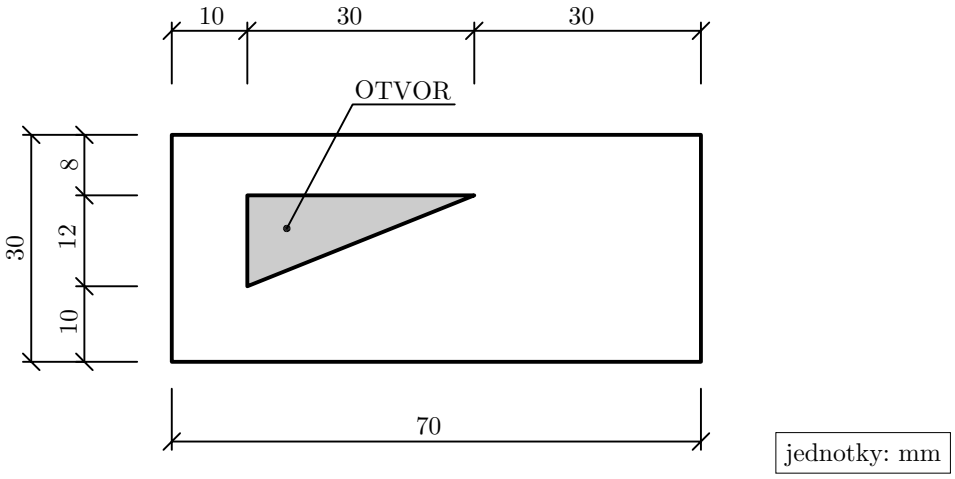
Příklady k procvičení

Ať zvolíte pomocné osy kdekoli, výsledky musí být stejné.

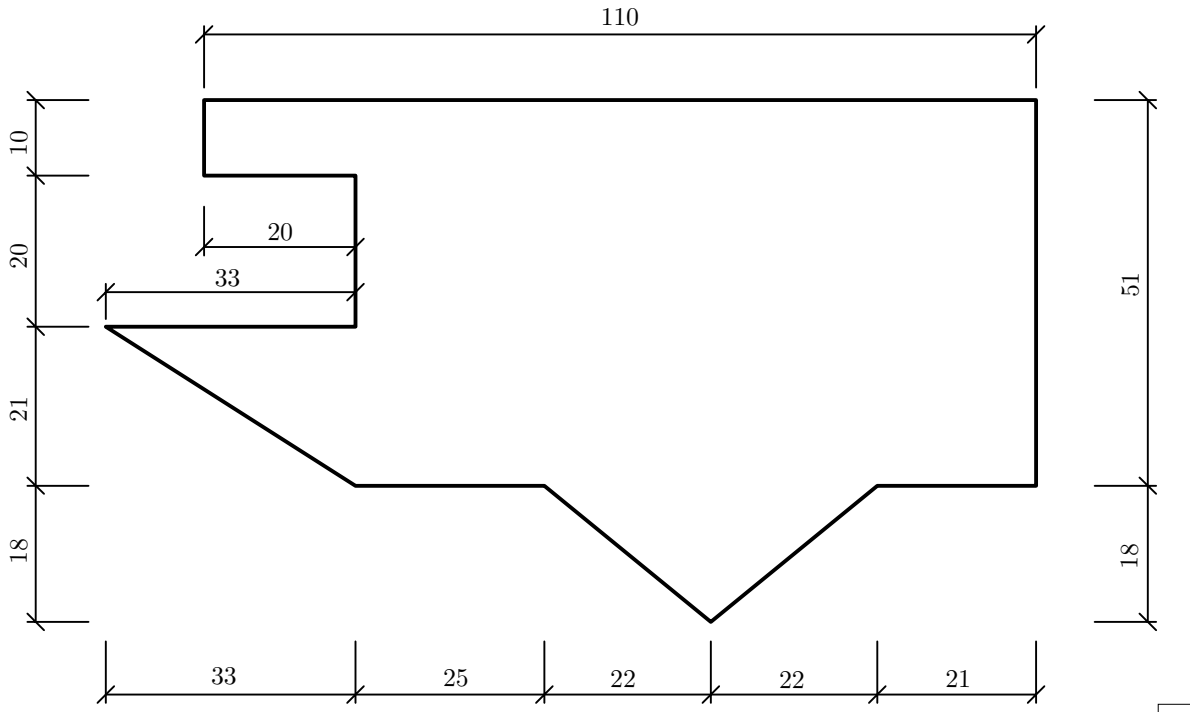
4.A



4.B



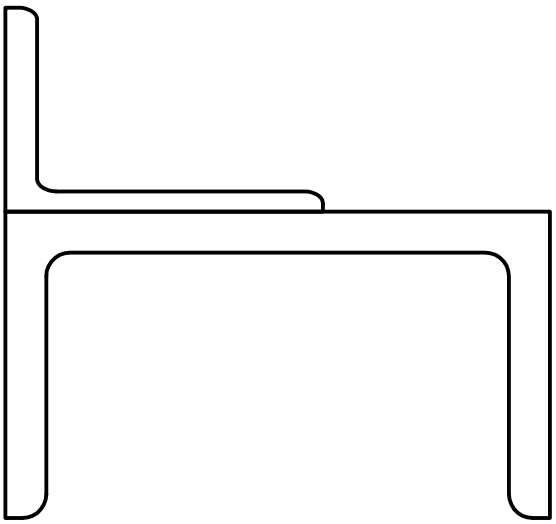
4.C



jednotky: mm

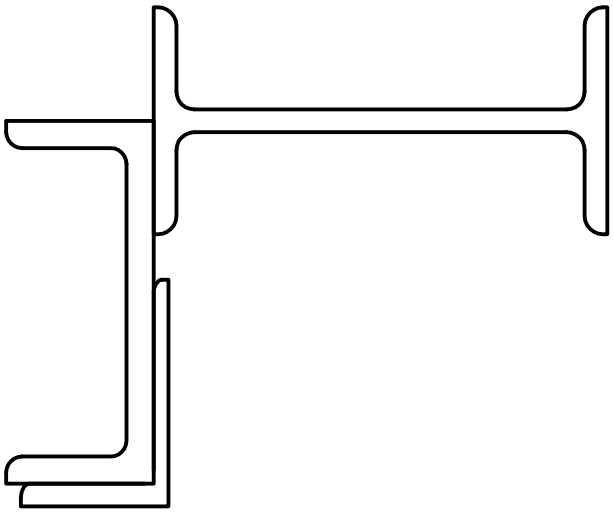
4.D

Uč. 240
Lč. 140/90/100



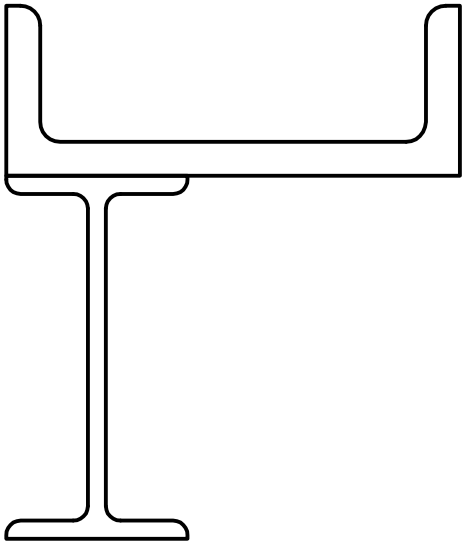
4.E

Uč. 160
Ič. 200
Lč. 100/65/8



4.F

Uč. 200
Ič. 160



5 Statika tuhé desky

5.1 Rovnováha tuhé desky

V hodinách stavební mechanicky jste se dozvěděli o základních druzích stavebních konstrukcí (prut, deska, blok) a o tom, že rovnovážný stav stavebních konstrukce nastává, když akce (zatížení) a reakce (síly v podporách) jsou navzájem v rovnováze.

AKCE=REAKCE

5.2 Podepření tuhé desky

Stavební konstrukce musí být vždy dostatečně podepřena, tzn. STATICKY URČITÁ (popř. nadbytečně podepřená). Musíme tedy zrušit vhodnými podepřeními její 3 stupně volnosti.

Používáme

- pohyblivý kloub odebírá jeden stupeň volnosti ↑
- kyvný prut odebírá jeden stupeň volnosti ve směru prutu ↑
- pevný kloub odebírá dva stupně volnosti ↑⟶
- dokonalé vetknutí odebírá tři stupně volnosti ↑⟶↷

Úkolem stavební mechaniky je vypočítat reakce (síly v podporách). Postupujeme nám již známým způsobem, tj.:

Početně pomocí početních podmínek rovnováhy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_i &= 0 \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{n} M_i &= 0 \end{aligned}$$

Graficky pomocí grafických podmínek rovnováhy

– složková čára musí být uzavřená,

– výslednicový obraz musí být uzavřen.

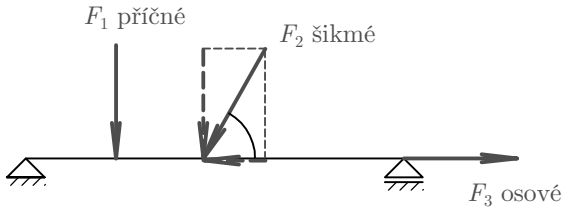
5.3 Zatížení stavebních konstrukcí

A) Osamělá břemena:

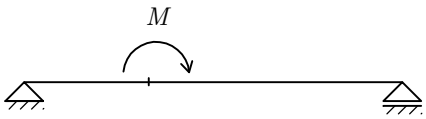
– příčné (kolmé na osu nosníku),

– osové (v ose nosníku),

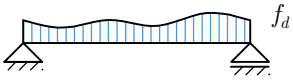
– šikmé (budeme pro snadnější výpočet rozkládat na příčné a osové).



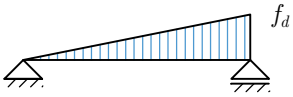
B) Osamělé momenty:

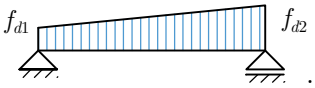


C) Spojité příčné:

– obecné 

– rovnoměrné

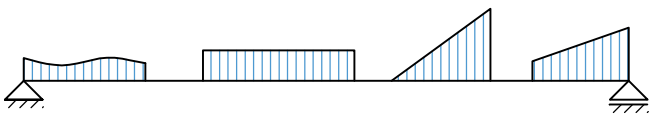
– trojúhelníkové 

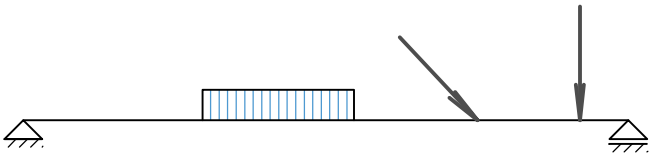
– lichoběžníkové 

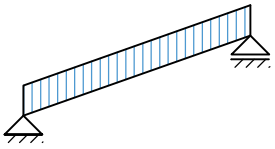
.

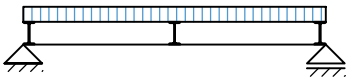
U spojitého zatížení se při určování reakcí vždy pracuje s tzv. náhradním břemenem, které je vlastně obsahem tohoto zatížení.

D) Částečně spojité ve variantách jako spojité příčné:



E) Kombinované: 

F) Šikmé – paprsek síly svírá s osou nosníku ostrý úhel: 

G) Nepřímé – přenáší zatížení přes mezilehlou konstrukci: 

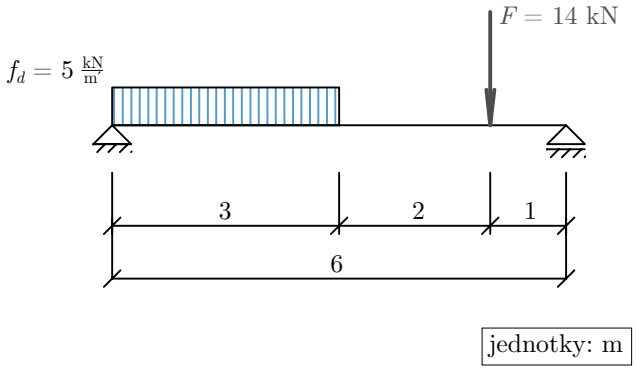
5.4 Výpočet reakcí staticky určitých nosníků

Dejte do rovnováhy tuto soustavu zatížení na nosníku, tzn. vypočítejte reakce v podporách, aby celá soustava byla v rovnováze.

5.4.1 Prostý nosník

Příklad 5.4.1.1

Zadání:

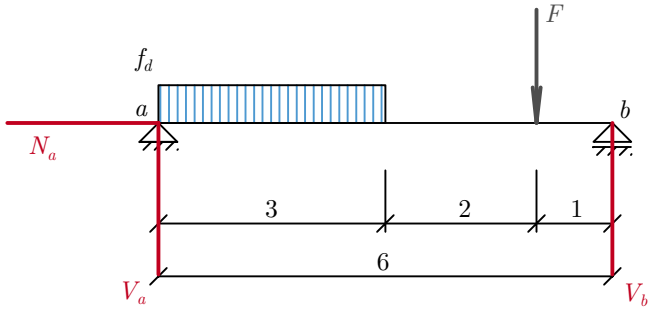


Řešení:

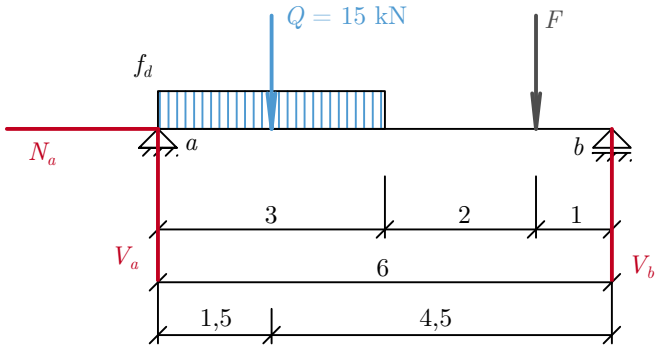
1) Určím počet stupňů volnosti v podporách a paprskem si vyznačím, ve kterých směrech bude reakce působit (zatím bez šipky, výsledný směr nám ukáže až výsledek). Označím si i podpory.

pevný kloub – dva stupně volnosti

 pohyblivý kloub – jeden stupeň volnosti



2) Vypočítáme náhradní břemeno (budeme ho z důvodu odlišení od osamělých břemen označovat písmenem Q).



$$Q = f_d \cdot l = 5 \cdot 3 = 15\,\text{kN}$$

3) Početní řešení

Z našeho zadání příkladu je zřejmé, že všechny síly jsou příčné, tj. kolmé na osu prutu, z čehož vyplývá, že vodorovné síly nejsou – vodorovná reakce je rovna nule.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\ N_a &= 0 \end{aligned}$$

Dále použiji momentovou podmínku k podpoře b:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\ Q \cdot 4,5 - F \cdot 1 + V_a \cdot 6 &= 0 \\ -15 \cdot 4,5 - 14 \cdot 1 + V_a \cdot 6 &= 0 \\ 6V_a &= 81,5 \\ V_a &= 13,58\,\text{kN} \curvearrowright \end{aligned}$$

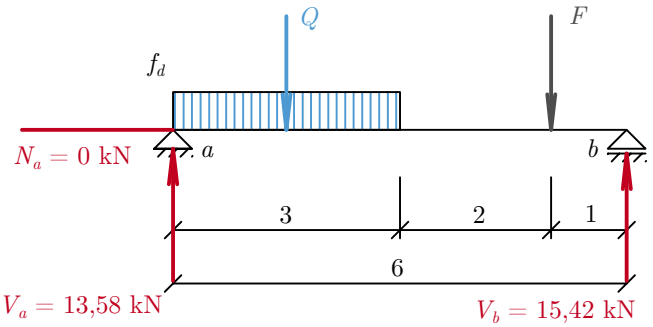
Nyní pomocí momentové podmínky k podpoře a vypočítáme reakci V_b.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
Q \cdot 1,5 + F \cdot 5 + V_b \cdot 6 &= 0 \\
15 \cdot 1,5 + 14 \cdot 5 + V_b \cdot 6 &= 0 \\
6V_b &= -92,5 \\
V_b &= -15,42\,\text{kN} \curvearrowleft
\end{aligned}$$

Abychom si potvrdili správnost našeho řešení, použijeme silovou součtovou podmínku do osy y:

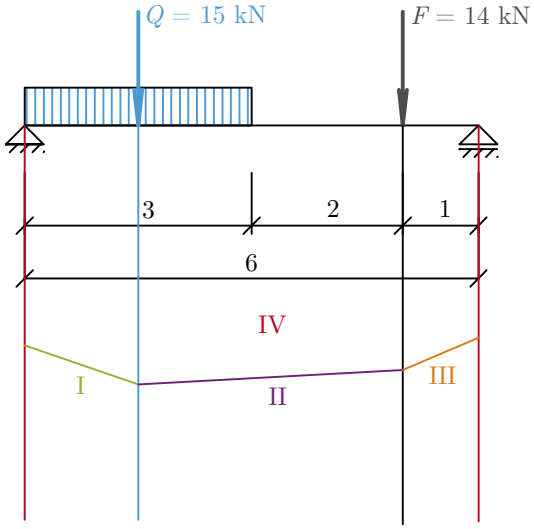
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\
V_a + Q + F + V_b &= 0 \\
13,58 - 15 - 14 + 15,42 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

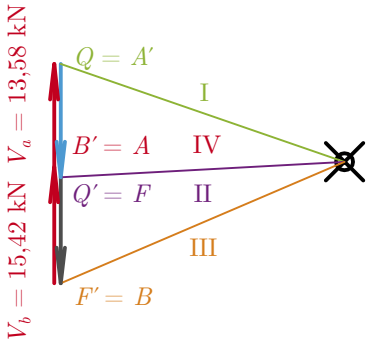
Potvrdili jsme si správnost našeho řešení a výsledek zakreslíme do zadání.



4) Grafické řešení

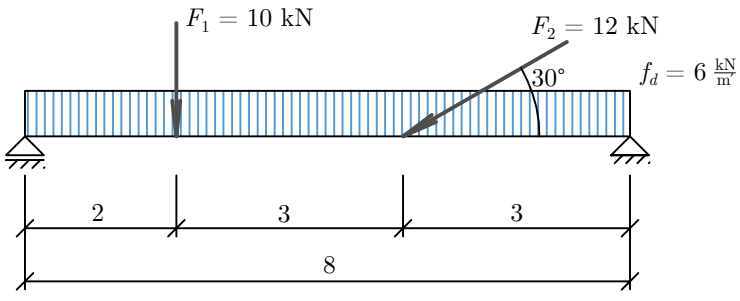
Ačkoli je grafické řešení pracné - a pokud je děláme ručně i nepřesné - vyzkoušíme si jej alespoň na tomto jednoduchém příkladu, kdy jsou všechny síly (akce i reakce) příčné.





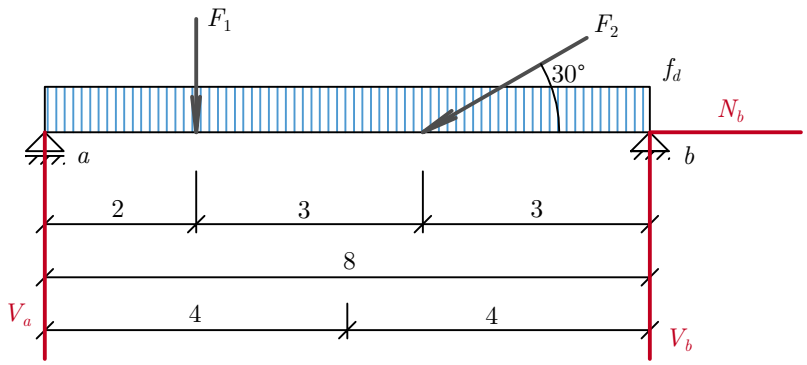
Příklad 5.4.1.2

Zadání



jednotky: m

1)

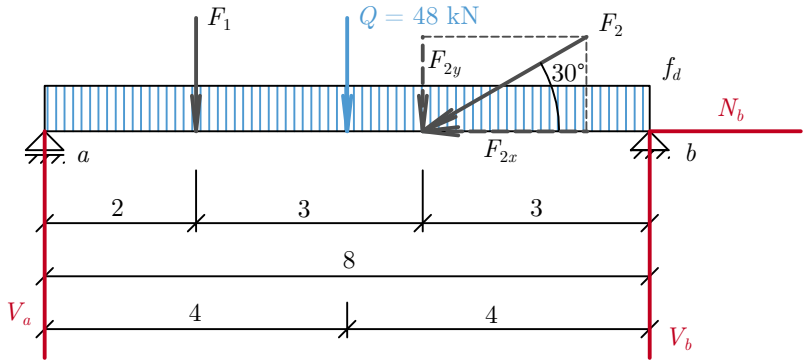


2A) Rozložíme šikmou sílu F_2 na její vodorovnou a svislou složku

$$\begin{aligned} F_{2x} &= F_2 \cos 30^\circ = 12 \cos 30^\circ = 10,392\,\text{kN} \\ F_{2y} &= F_2 \sin 30^\circ = 12 \sin 30^\circ = 6\,\text{kN} \end{aligned}$$

2B) Určíme náhradní břemeno

$$Q = f_d \cdot l = 6 \cdot 8 = 48\,\text{kN}$$



3)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\ F_{2x} + N_b &= 0 \\ -10,392 + N_b &= 0 \\ N_b &= 10,392\,\text{kN} \longrightarrow \end{aligned}$$

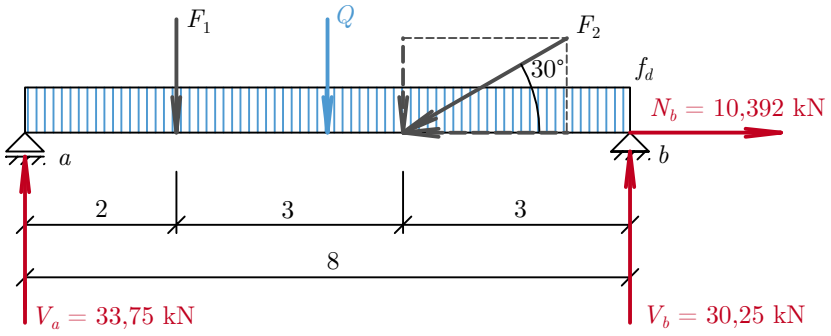
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\
V_a \cdot 8 - F_1 \cdot 6 - Q \cdot 4 - F_{2y} \cdot 3 &= 0 \\
V_a \cdot 8 - 10 \cdot 6 - 48 \cdot 4 - 6 \cdot 3 &= 0 \\
8V_a &= 270 \\
V_a &= 33,75\,\text{kN} \curvearrowright
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
F_1 \cdot 2 + Q \cdot 4 + F_{2y} \cdot 5 + V_b \cdot 8 &= 0 \\
10 \cdot 2 + 48 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + V_b \cdot 8 &= 0 \\
8V_b &= -242 \\
V_b &= -30,25\,\text{kN} \curvearrowleft
\end{aligned}$$

Zkouška:

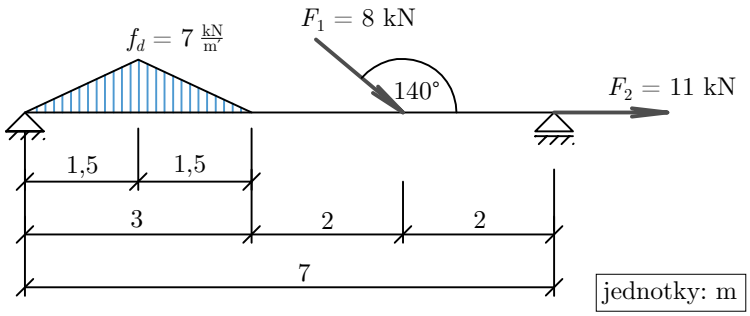
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\
V_a - F_1 - Q - F_{2y} + V_b &= 0 \\
33,75 - 10 - 48 - 6 + 30,25 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Zakreslení výsledků:

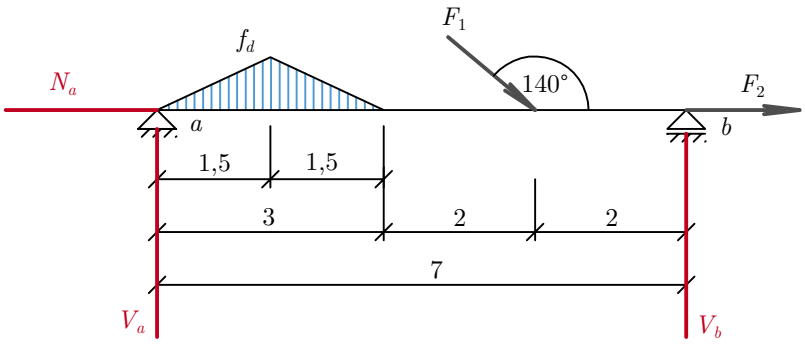


Příklad 5.4.1.3

Zadání



1)

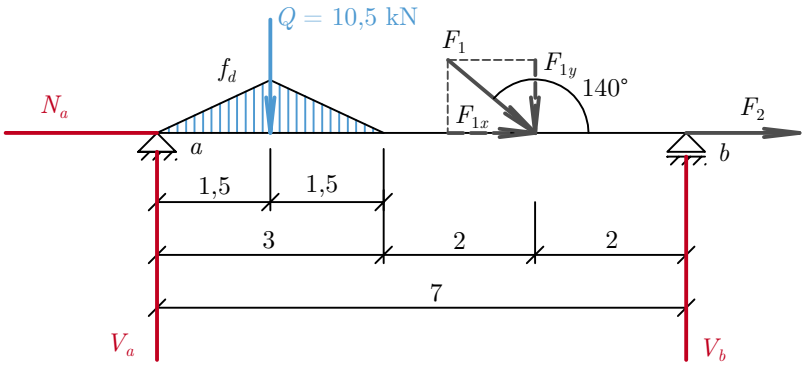


2)

$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_1 \cos 40° = 8 \cos 40° = 6,128\,\text{kN} \\ F_{1y} &= F_1 \sin 40° = 8 \sin 40° = 5,142\,\text{kN} \end{aligned}$$

$$Q = \frac{f_d \cdot l}{2} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = 10,5\,\text{kN}$$

zakreslení



3)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\
N_a + F_{1x} + F_2 &= 0 \\
N_a + 6,128 + 11 &= 0 \\
N_a &= -17,128\,\text{kN} \leftarrow
\end{aligned}$$

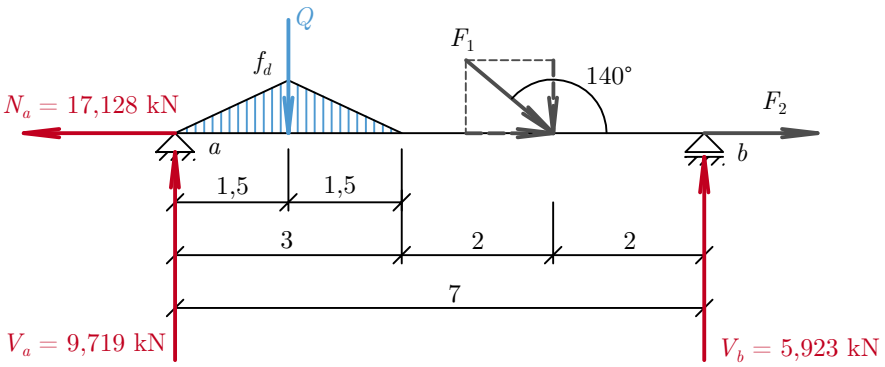
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\
V_a \cdot 7 - Q \cdot 5,5 - F_{1y} \cdot 2 &= 0 \\
V_a \cdot 7 - 10,5 \cdot 5,5 - 5,142 \cdot 2 &= 0 \\
7V_a &= 68,034 \\
V_a &= 9,719\,\text{kN} \curvearrowright
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
Q \cdot 1,5 + F_{1y} \cdot 5 + V_b \cdot 7 &= 0 \\
10,5 \cdot 1,5 + 5,142 \cdot 5 + V_b \cdot 7 &= 0 \\
7V_b &= -41,46 \\
V_b &= -5,923\,\text{kN} \curvearrowleft
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\
V_a - Q - F_{1y} + V_b &= 0 \\
9,719 - 10,5 - 5,142 + 5,923 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

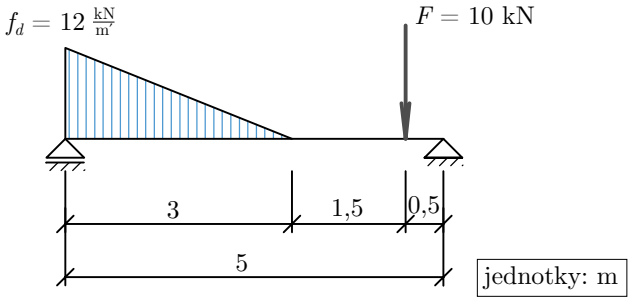
Zakreslení



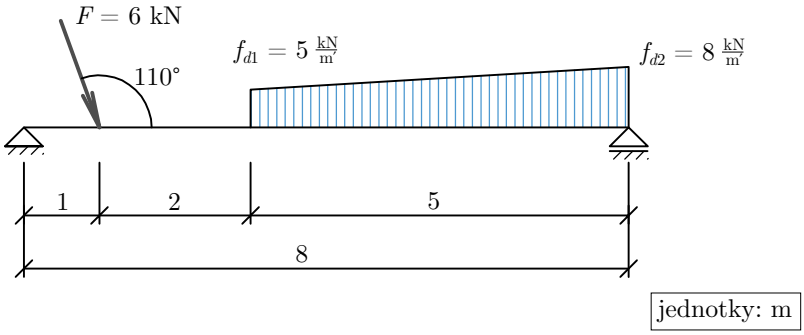
Příklady k procvičení

Dejte do rovnováhy tento prostý nosník pomocí reakcí.

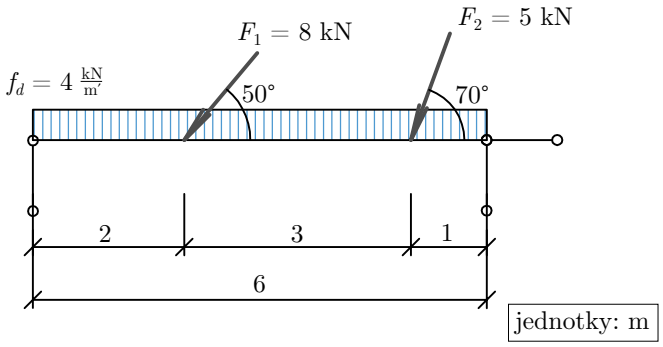
5.4.1.A



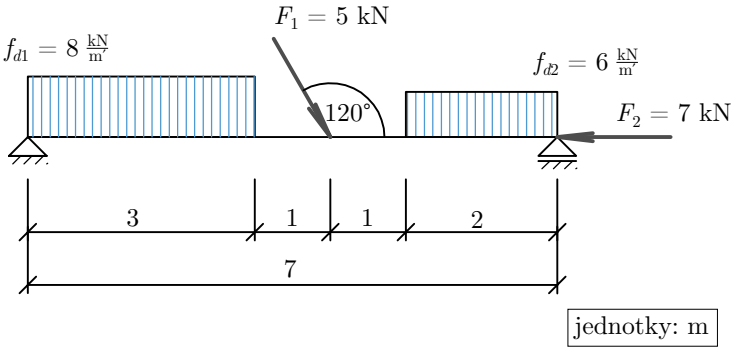
5.4.1.B



5.4.1.C



5.4.1.D

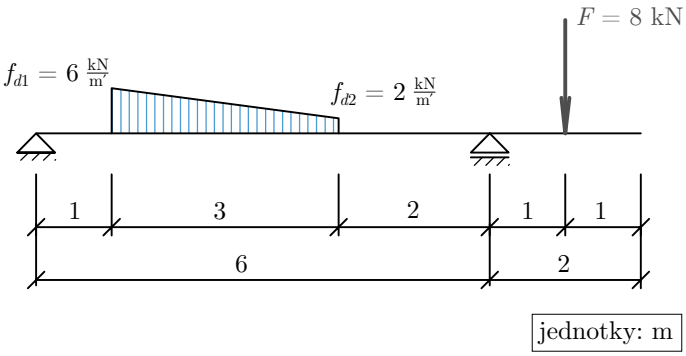


5.4.2 Prostý nosník s převislým koncem

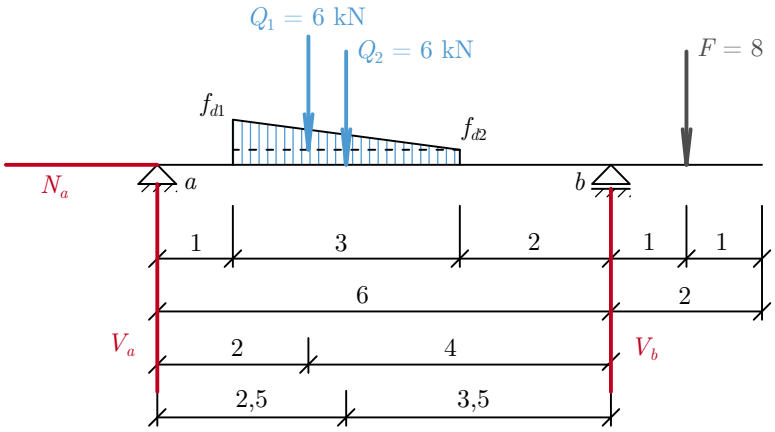
Dejte do rovnováhy tuto soustavu zatížení na nosníku.

Příklad 5.4.2.1

Zadání



Náhradní břemena a paprsky reakcí



$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\,\mathrm{kN} \\ Q_2 &= 2 \cdot 3 = 6\,\mathrm{kN} \end{aligned}$$

Výpočet

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\ N_a &= 0 \end{aligned}$$

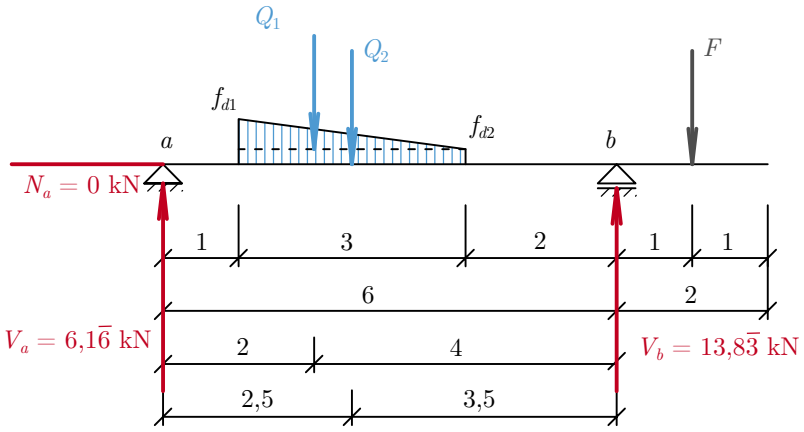
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\ V_a \cdot 6 - Q_1 \cdot 4 - Q_2 \cdot 3,5 + F \cdot 1 &= 0 \\ V_a \cdot 6 - 6 \cdot 4 - 6 \cdot 3,5 + 8 \cdot 1 &= 0 \\ V_a &= 6,1\overline{6}\,\mathrm{kN} \curvearrowright \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\ Q_1 \cdot 2 + Q_2 \cdot 2,5 + V_b \cdot 6 + F \cdot 7 &= 0 \\ 6 \cdot 2 + 6 \cdot 2,5 + V_b \cdot 6 + 8 \cdot 7 &= 0 \\ V_b &= -13,8\overline{3}\,\mathrm{kN} \curvearrowleft \end{aligned}$$

Zkouška

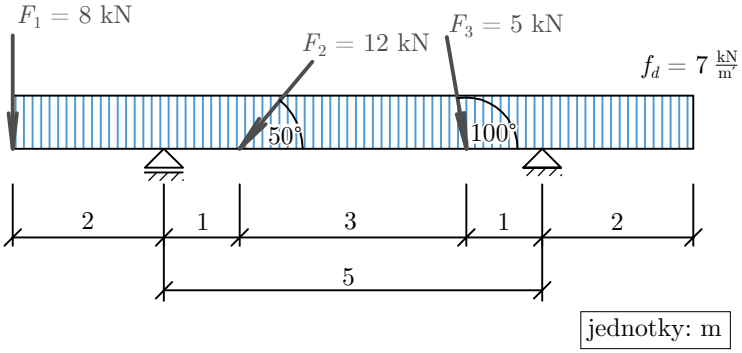
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\ 6,1\overline{6} - 6 - 6 + 13,8\overline{3} - 8 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Zakreslení výsledků do zadání



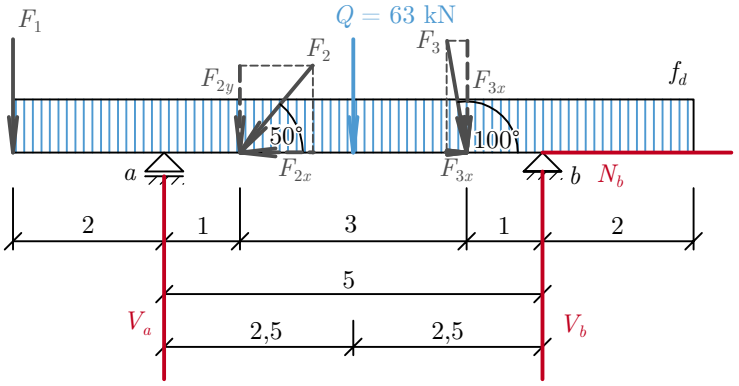
Příklad 5.4.2.2

Zadání



Náhradní břemena, rozklad šikmých sil, paprsky reakcí

$$\begin{aligned} Q &= 7 \cdot 9 = 63\,\text{kN} \\ F_{2x} &= F_2 \cos 50° = 12 \cos 50° = 7,713\,\text{kN} \\ F_{2y} &= F_2 \sin 50° = 12 \sin 50° = 9,193\,\text{kN} \\ F_{3x} &= F_3 \cos 80° = 5 \cos 80° = 0,868\,\text{kN} \\ F_{3y} &= F_3 \sin 80° = 5 \sin 80° = 4,924\,\text{kN} \end{aligned}$$



Výpočet

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\ -7,713 + 0,868 + N_b &= 0 \\ N_b &= 6,845\,\text{kN} \rightarrow \end{aligned}$$

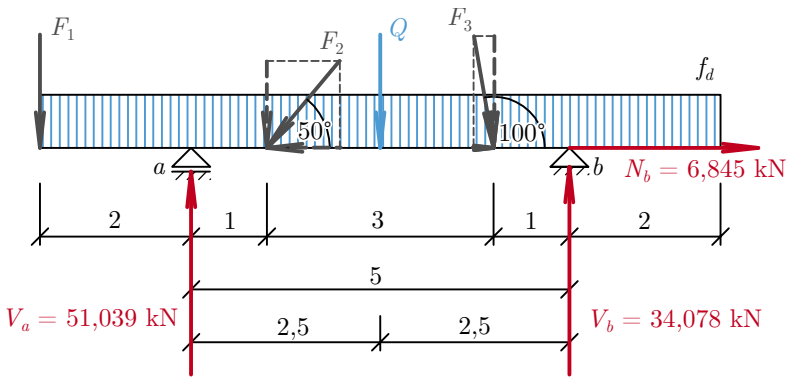
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\ -8 \cdot 7 - 9,193 \cdot 4 - 63 \cdot 2,5 - 4,924 \cdot 1 + V_a \cdot 5 &= 0 \\ V_a &= 51,039\,\text{kN} \curvearrowright \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\ -8 \cdot 2 + 9,193 \cdot 1 + 63 \cdot 2,5 + 4,924 \cdot 4 + V_b \cdot 5 &= 0 \\ V_b &= -34,078\,\text{kN} \curvearrowleft \end{aligned}$$

Zkouška

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\ -8 + 51,039 - 9,193 - 63 - 4,924 + 34,078 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

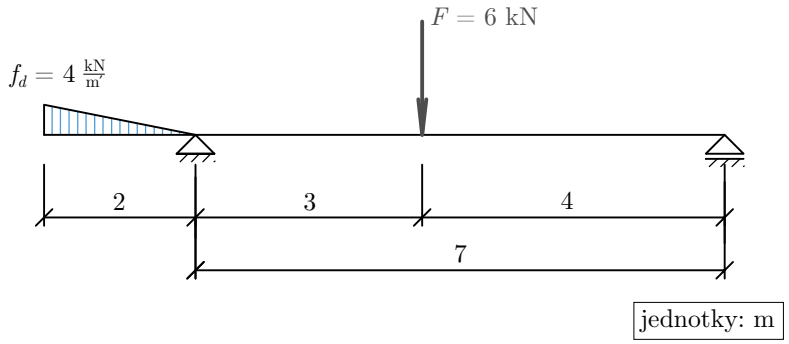
Zakreslení výsledků do zadání



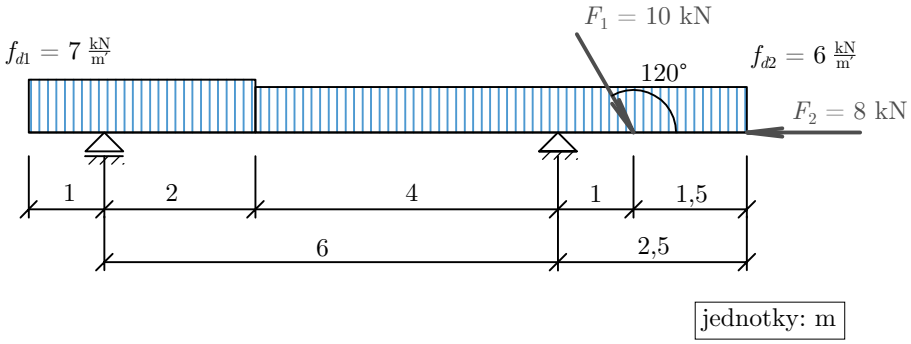
Příklady k procvičení

Dejte do rovnováhy tyto soustavy sil.

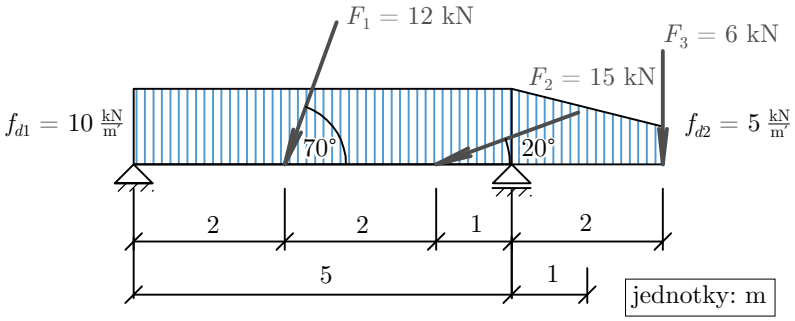
5.4.2.A



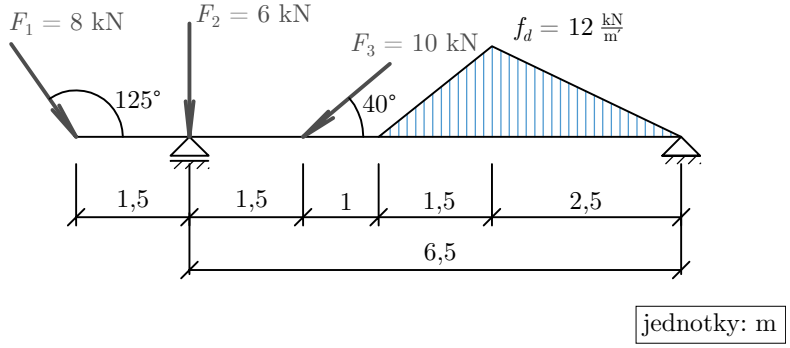
5.4.2.B



5.4.2.C



5.4.2.D

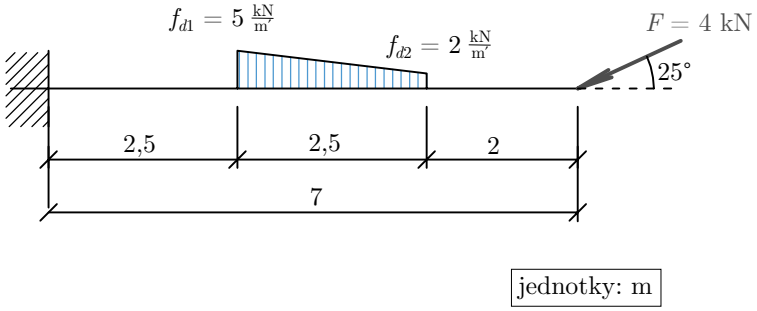


5.4.3 Konzola

Dejte do rovnováhy tuto soustavu zatížení na nosníku.

Příklad 5.4.3.1

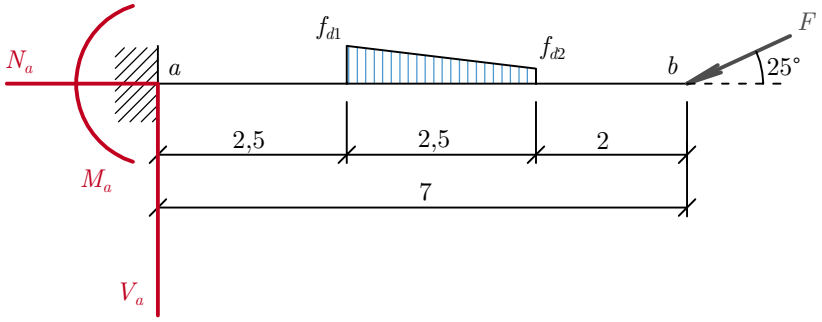
Zadání



Řešení

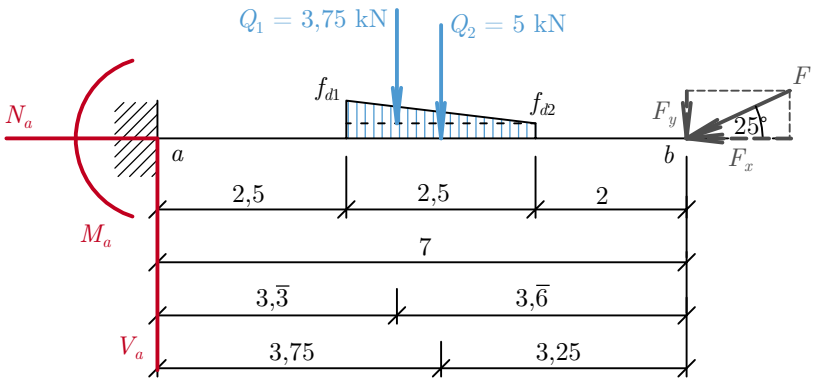
1) Určíme počet stupňů volnosti v podpoře a vyznačíme reakce (zatím bez šipky, směr ukáže až výpočet). Označíme podporu.

Dokonalé vetknutí - tři stupně volnosti



2) Vypočítáme náhradní břemena a provedeme rozklad šikmých sil

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2,5 = 3,75\,\text{kN} \\ Q_2 &= 2 \cdot 2,5 = 5\,\text{kN} \\ F_x &= 4\cos 25° = 3,625\,\text{kN} \\ F_y &= 4\sin 25° = 1,69\,\text{kN} \end{aligned}$$



3) Výpočet

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\ N_a - F_x &= 0 \\ N_a - 3,625 &= 0 \\ N_a &= 3,625\,\text{kN} \rightarrow \end{aligned}$$

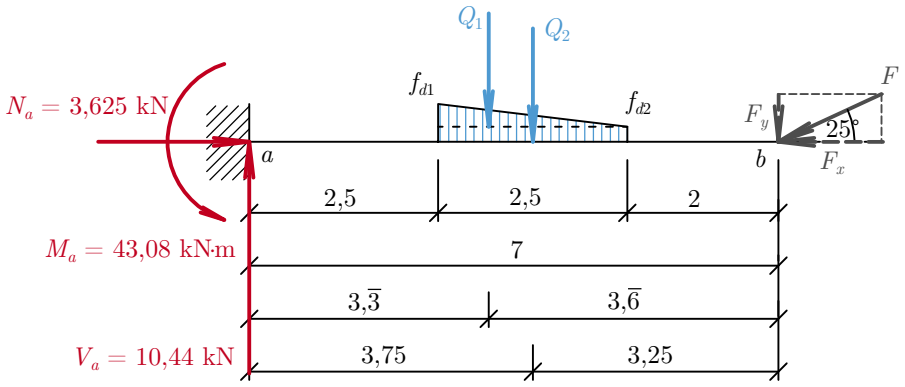
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\
V_a - Q_1 - Q_2 - F_y &= 0 \\
V_a - 3,75 - 5 - 1,69 &= 0 \\
V_a &= 10,44\,\text{kN} \uparrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
M_a + Q_1 \cdot l_1 + Q_2 \cdot l_2 + F_y \cdot l_3 &= 0 \\
M_a + 3,75 \cdot 3,\overline{3} + 5 \cdot 3.75 + 1,69 \cdot 7 &= 0 \\
M_a &= -43,08\,\text{kN} \cdot \text{m} \curvearrowleft
\end{aligned}$$

Jako zkoušku je vhodné si zvolit jiný bod na konzole jako střed otáčení (např. b) a ověřit si momentovou podmínku rovnováhy k tomuto bodu.

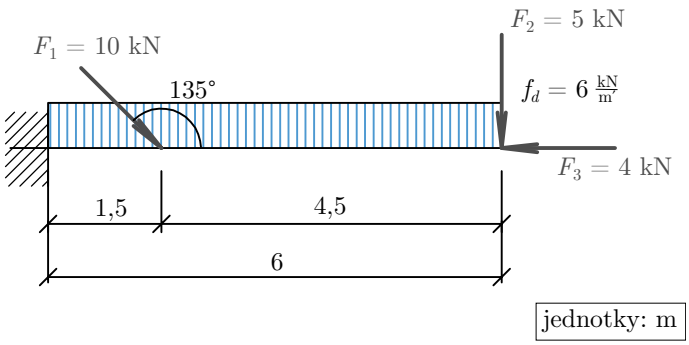
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\
-M_a + V_a \cdot l_a - Q_1 \cdot l_1' - Q_2 \cdot l_2' &= 0 \\
-43,08 + 10,44 \cdot 7 - 3,75 \cdot 3,\overline{6} - 5 \cdot 3,25 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Potvrdili jsme si správnost našeho řešení a výsledek zakreslíme do zadání.



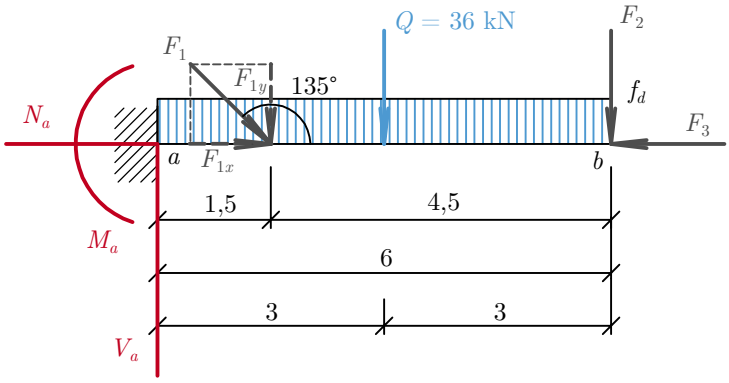
Příklad 5.4.3.2

Zadání



Náhradní břemena, rozklad šikmých sil, zakreslení reakcí a označení podpory

$$
\begin{aligned}
Q &= 6 \cdot 6 = 36\,\text{kN} \\
F_{1x} &= F_1 \cos 45^\circ = 10 \cos 45^\circ = 7,071\,\text{kN} \\
F_{1y} &= F_1 \sin 45^\circ = 10 \sin 45^\circ = 7,071\,\text{kN}
\end{aligned}
$$



Výpočet

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\
N_a + F_{1x} - F_3 &= 0 \\
N_a + 7,071 - 4 &= 0 \\
N_a &= -3,071\,\text{kN} \leftarrow
\end{aligned}
$$

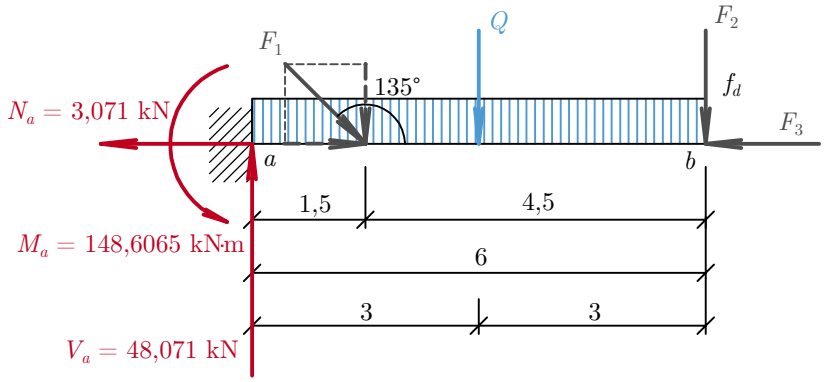
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\
V_a - F_{1y} - Q - F_2 &= 0 \\
V_a - 7,071 - 36 - 5 &= 0 \\
V_a &= 48,071\,\text{kN} \uparrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
M_a + F_{1y} \cdot l_1 + Q \cdot l_2 + F_2 \cdot l_3 &= 0 \\
M_a + 7,071 \cdot 1,5 + 36 \cdot 3 + 5 \cdot 6 &= 0 \\
M_a &= -148,6065\,\text{kN} \cdot \text{m} \curvearrowleft
\end{aligned}$$

Zkouška

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\
M_a + V_a \cdot l_a - F_{1y} \cdot l_1' - Q \cdot l_2' &= 0 \\
-148,6065 + 48,071 \cdot 6 - 7,071 \cdot 4,5 - 36 \cdot 3 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

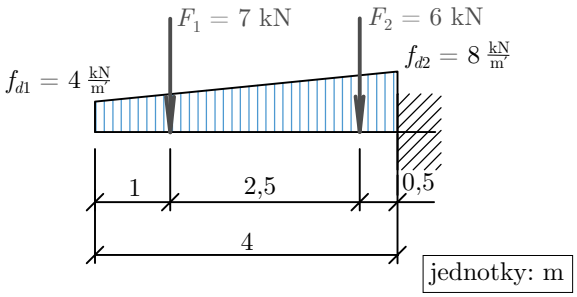
Zakreslení do zadání



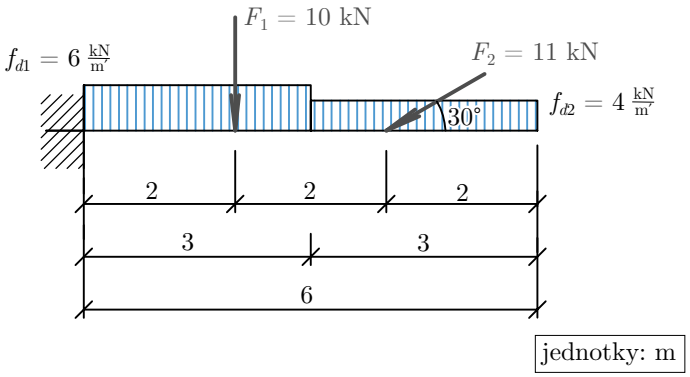
Příklady k procvičení

Dejte do rovnováhy tyto soustavy sil.

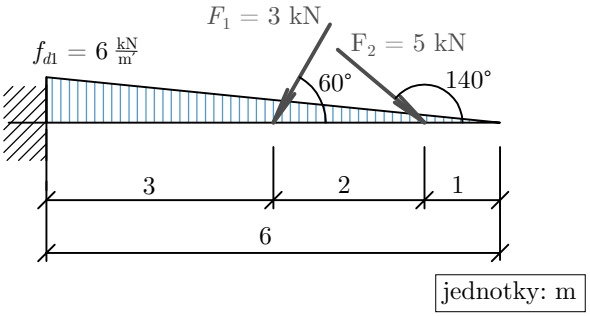
5.4.3.A



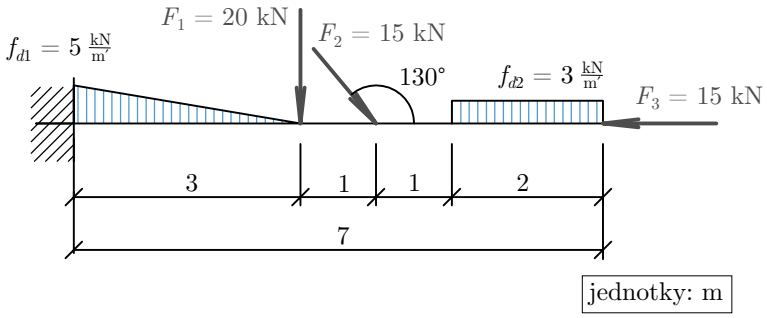
5.4.3.B



5.4.3.C



5.4.3.D



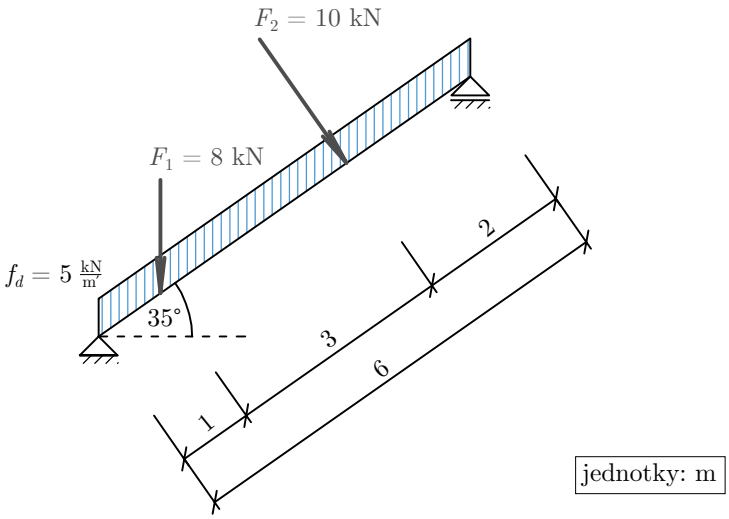
5.4.4 Šikmý nosník

U šikmých nosníků je princip řešení stále stejný, jen je pro menší pracnost řešení vhodné, abychom si veškerá zatížení rozkládali na složky, které mají stejný směr jako reakce. Poznámka: Ačkoli to není v souladu s naší dřívější úmluvou, že síly v ose nosníku budeme značit N a síly kolmé na osu nosníku V, budeme u šikmých (a dále i u lomených) nosníků značit vodorovné síly N a svislé V, abychom nekomplikovali další označení. Pro naše účely nám toto zjednodušení postačí.

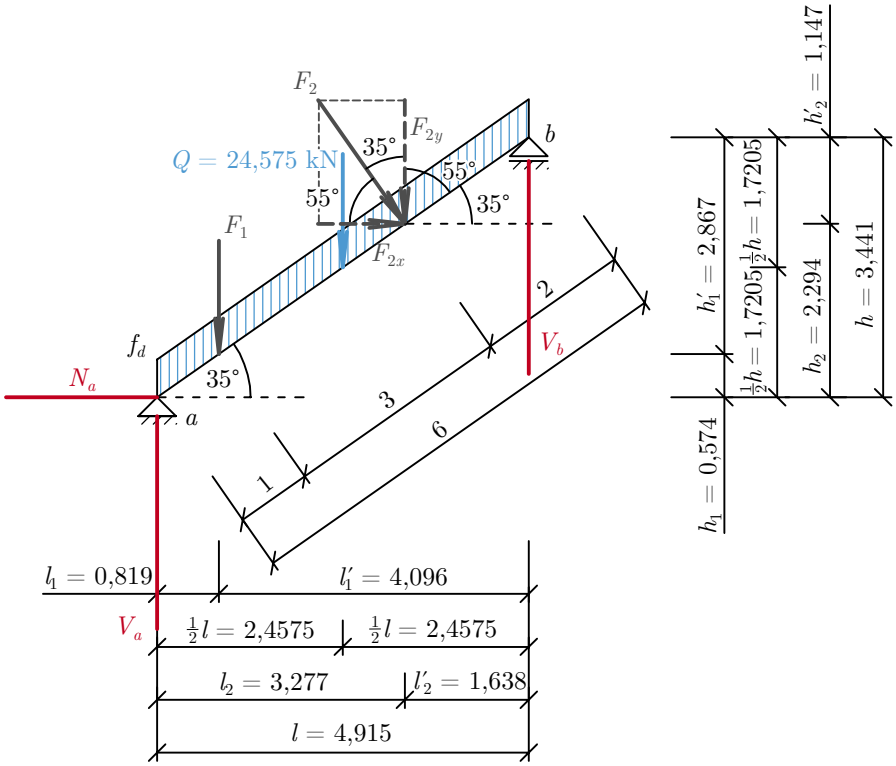
Dejte do rovnováhy tyto soustavy zatížení na nosníku.

Příklad 5.4.4.1

Zadání



Paprsky reakcí, rozklad sil, náhradní břemena



Dopočítáme si potřebné délky

$$\begin{aligned} \cos 35^\circ &= \frac{l}{6} \\ l &= 6\cos 35^\circ = 4{,}915\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 35^\circ &= \frac{h}{6} \\ h &= 6\sin 35^\circ = 3{,}441\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_1 &= 1\cos 35^\circ = 0,819\,\mathrm{m}\\
l_1' &= 4,915 - 0,819 = 4,096\,\mathrm{m}\\
l_2 &= 4\cos 35^\circ = 3,277\,\mathrm{m}\\
l_2' &= 4,915 - 3,277 = 1,638\,\mathrm{m}\\
h_1 &= 1\sin 35^\circ = 0,574\,\mathrm{m}\\
h_1' &= 3,441 - 0,574 = 2,867\,\mathrm{m}\\
h_2 &= 4\sin 35^\circ = 2,294\,\mathrm{m}\\
h_2' &= 3,441 - 2,294 = 1,147\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Vypočítáme akce

$$
\begin{aligned}
Q &= f_d \cdot l = 5 \cdot 4,915 = 24,575\,\mathrm{kN}\\
F_{2x} &= F_2\cos 55^\circ = 10\cos 55^\circ = 5,736\,\mathrm{kN}\\
F_{2y} &= F_2\sin 55^\circ = 10\sin 55^\circ = 8,192\,\mathrm{kN}
\end{aligned}
$$

Je zřejmé, že je nutné uvědomit si, na jakém rameni daná síla působí. Připomeňme si, že rameno je vždy nejkratší (kolmá) vzdálenost k zvolenému středu otáčení.

Výpočet

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0\\
N_a + F_{2x} &= 0\\
N_a + 5,736 &= 0\\
N_a &= -5,736\,\mathrm{kN} \leftarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0\\
V_a \cdot l + N_a \cdot h - F_1 \cdot l_1' - Q \cdot \frac{l}{2} - F_{2y} \cdot l_2' - F_{2x} \cdot h_2' &= 0\\
V_a \cdot 4,915 + 5,736 \cdot 3,441 - 8 \cdot 4,096 - 24,575 \cdot 2,4575 & \\
-8,192 \cdot 1,638 - 5,736 \cdot 1,147 &= 0\\
V_a &= 19,007\,\mathrm{kN} \curvearrowright
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
F_1 \cdot l_1 + Q \cdot \frac{l}{2} + F_{2y} \cdot l_2 + F_{2x} \cdot h_2 + V_b \cdot l &= 0 \\
8 \cdot 0,819 + 24,575 \cdot 2,4575 + 8,192 \cdot 3,277 + & \\
+5,736 \cdot 2,294 + V_b \cdot 4,915 &= 0 \\
V_b &= -21,76\,\text{kN} \curvearrowleft
\end{aligned}$$

Zkouška

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\
V_a - F_1 - Q - F_{2y} + V_b &= 0 \\
19,007 - 8 - 24,575 - 8,192 + 21,76 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Sílu F_2 lze také použít bez rozkladu na složky F_x a F_y. Můžete použít vždy buď původní sílu nebo její rozklad do složek F_x a F_y podle toho, co je pro vás výhodnější.

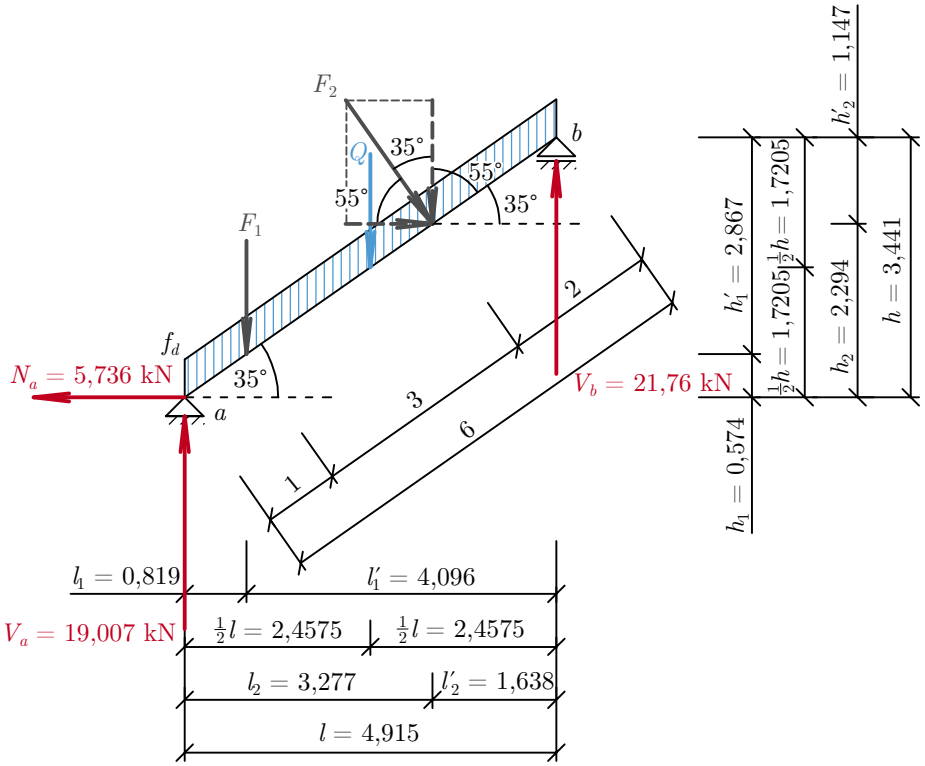
V případě, že bychom nepoužili rozklad síly F_2, vypadaly by momentové podmínky takto:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\
V_a \cdot l + N_a \cdot h - F_1 \cdot l_1' - Q \cdot \frac{l}{2} - F_2 \cdot 2 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
F_1 \cdot l_1 + Q \cdot \frac{l}{2} + F_2 \cdot 4 + V_b \cdot l &= 0
\end{aligned}$$

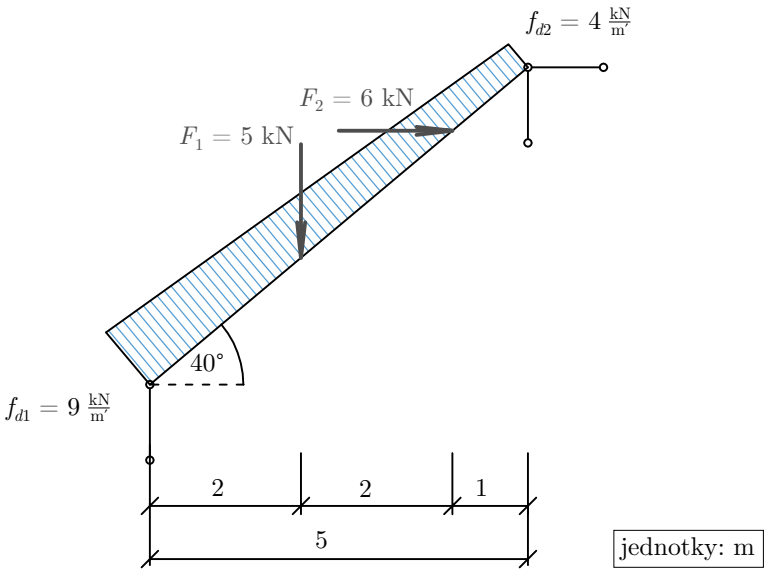
Silové podmínky by se neměnily, zde jsou pro výpočet nezbytné složky F_{2x} a F_{2y}.

Zakreslení výsledků do zadání

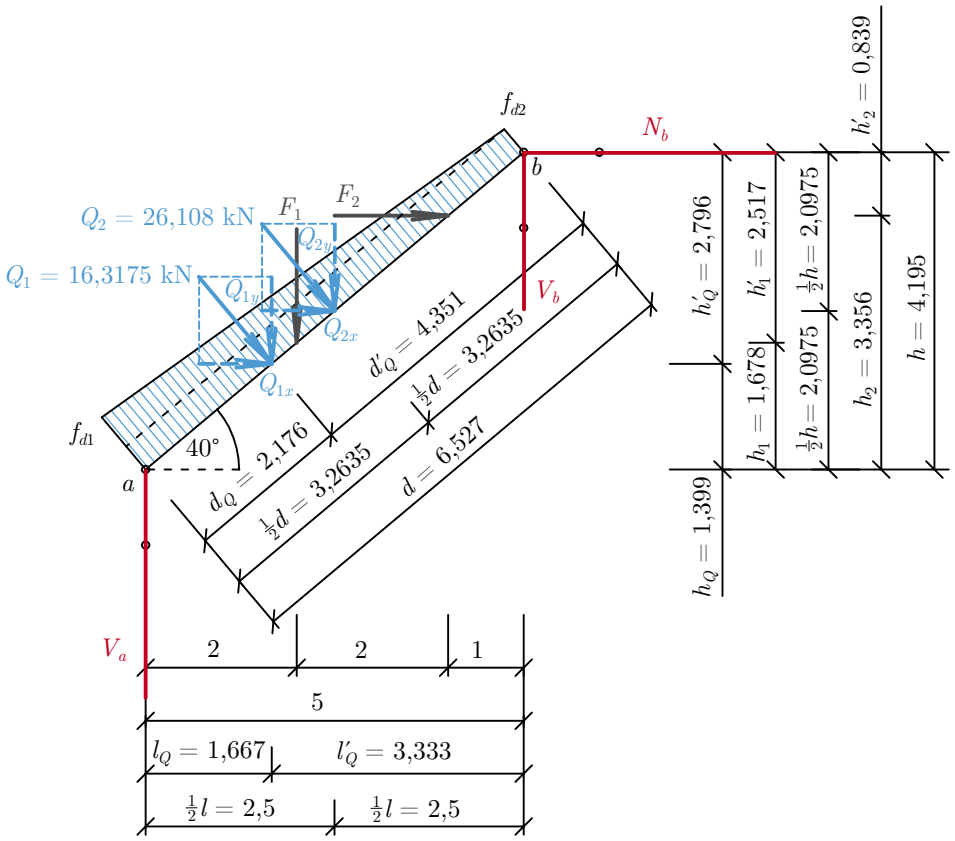


Příklad 5.4.4.2

Zadání



Paprsky reakcí, rozklad sil, náhradní břemena, výpočet vzdáleností



$$\begin{aligned}
\cos 40^\circ &= \frac{5}{d} \\
d &= \frac{5}{\cos 40^\circ} = 6,527\,\mathrm{m} \\
d_Q &= \frac{1}{3}d = \frac{1}{3}6,527 = 2,176\,\mathrm{m} \\
d'_Q &= d - d_Q = 6,527 - 2,176 = 4,351\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan 40^\circ &= \frac{h}{5} \\
h &= 5\tan 40^\circ = 4,195\,\mathrm{m} \\
h_1 &= 2\tan 40^\circ = 1,678\,\mathrm{m} \\
h'_1 &= h - h_1 = 4,195 - 1,678 = 2,517\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{2}\cdot(f_{d1}-f_{d2})\cdot d = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6,527 = 16,3175\,\text{kN}\\
Q_2 &= f_{d2}\cdot d = 4\cdot 6,527 = 26,108\,\text{kN}\\
Q_{1x} &= Q_1\cos 50^\circ = 16,3175\cos 50^\circ = 10,489\,\text{kN}\\
Q_{1y} &= Q_1\sin 50^\circ = 16,3175\sin 50^\circ = 12,5\,\text{kN}\\
Q_{2x} &= Q_2\cos 50^\circ = 26,108\cos 50^\circ = 16,782\,\text{kN}\\
Q_{2y} &= Q_2\sin 50^\circ = 26,108\sin 50^\circ = 20\,\text{kN}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= 4\tan 40^\circ = 3,356\,\text{m}\\
h_2' &= h - h_2 = 4,195 - 3,356 = 0,839\,\text{m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 40^\circ &= \frac{l_Q}{d_1} = \frac{l_Q}{2,176}\\
l_Q &= 2,176\cos 40^\circ = 1,667\,\text{m}\\
l_Q' &= l - l_Q = 5 - 1,667 = 3,333\,\text{m}\\
h_Q &= l_Q\tan 40^\circ = 1,667\tan 40^\circ = 1,399\,\text{m}\\
h_Q' &= h - h_Q = 4,195 - 1,399 = 2,796\,\text{m}
\end{aligned}$$

Výpočet reakcí

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0\\
Q_{1x} + Q_{2x} + F_2 + N_b &= 0\\
10,489 + 16,782 + 6 + N_b &= 0\\
N_b &= -33,271\,\text{kN} \leftarrow
\end{aligned}$$

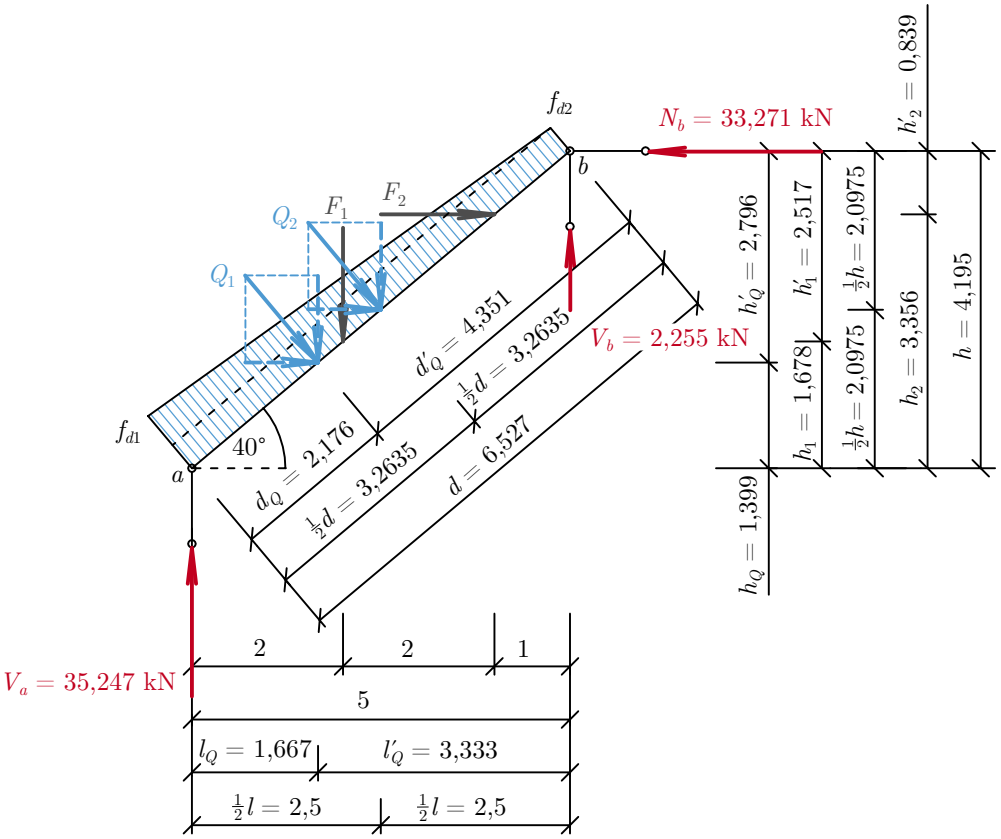
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0\\
V_a\cdot l - Q_1\cdot d_1' - F_1\cdot 3 - Q_2\cdot\frac{d}{2} - F_2\cdot h_2' &= 0\\
V_a\cdot 5 - 16,3175\cdot 4,351 - 5\cdot 3 - 26,108\cdot\frac{6,527}{2} - 6\cdot 0,839 &= 0\\
V_a &= 35,247\,\text{kN} \curvearrowright
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
Q_1 \cdot d_1 + F_1 \cdot 2 + Q_2 \cdot \frac{d}{2} + F_2 \cdot h_2 - N_b \cdot h + V_b \cdot l &= 0 \\
16,3175 \cdot 2,176 + 5 \cdot 2 + 26,108 \cdot \frac{6,527}{2} + & \\
+6 \cdot 3,356 - 33,271 \cdot 4,195 + V_b \cdot 5 &= 0 \\
V_b &= -2,255\,\text{kN} \curvearrowleft
\end{aligned}$$

Zkouška

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\
V_a - Q_{1y} - F_1 - Q_{2y} + V_b &= 0 \\
35,247 - 12,5 - 5 - 20 + 2,255 &= 0 \\
0,002 &\doteq 0
\end{aligned}$$

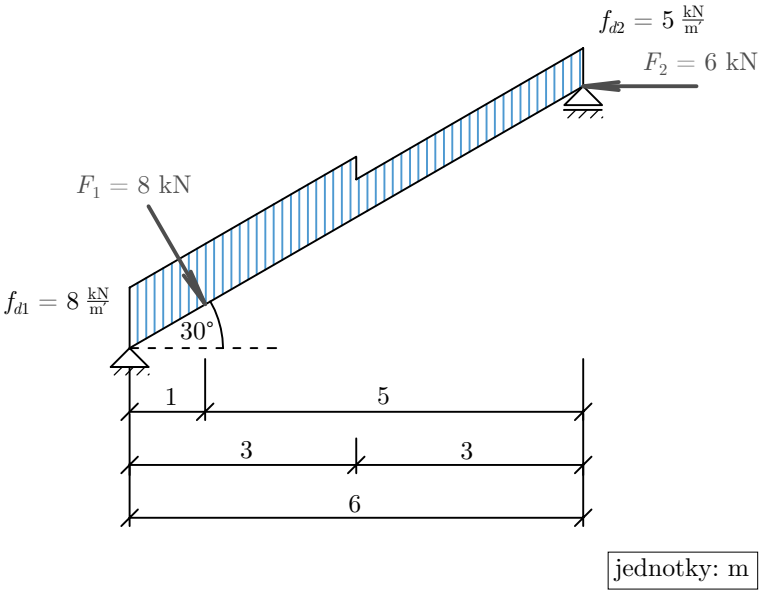
Zakreslení výsledků do zadání



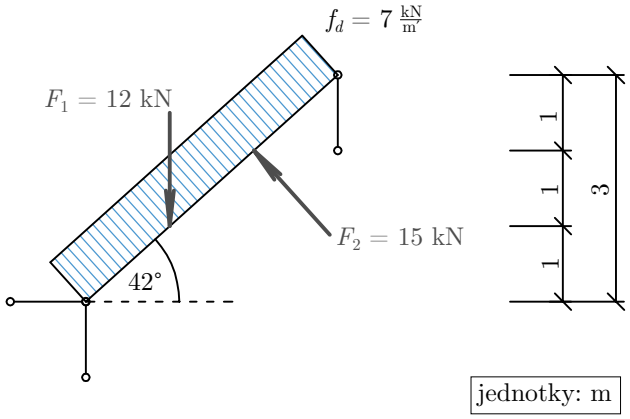
Příklady k procvičení

Dejte do rovnováhy tyto soustavy sil.

5.4.4.A



5.4.4.B



5.4.5 Lomený nosník

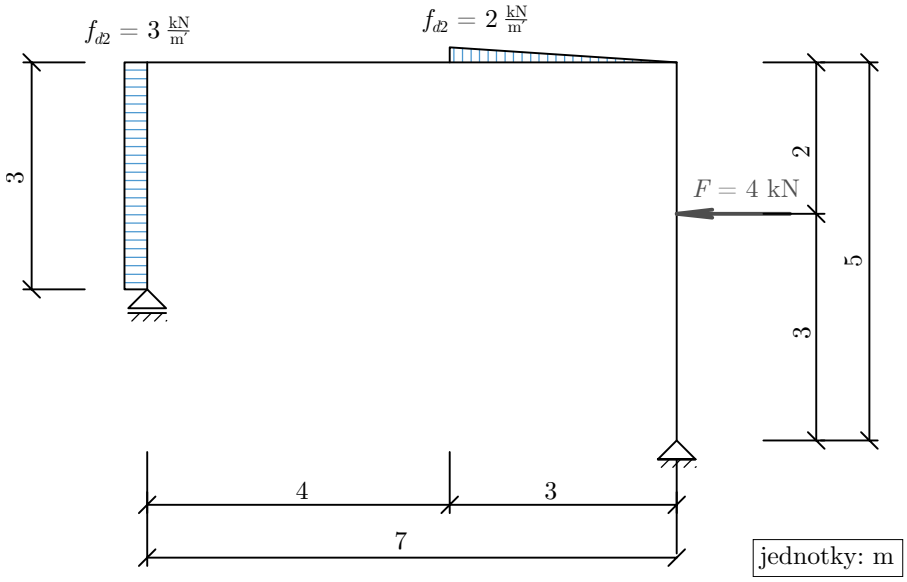
Také u lomených nosníků (ať už pravoúhle lomených nebo lomených pod jiným úhlem) platí, že musíme věnovat pečlivou pozornost výpočtům délek, úhlů a složek sil. Právě zde se dělá nejvíce chyb z nepozornosti a tyto chyby pak logicky mají vliv na výpočet reakcí.

Označení reakcí ponecháme jako u šikmých nosníků, tj. svislé V a vodorovné N.

Dejte do rovnováhy tuto soustavu zatížení na nosníku.

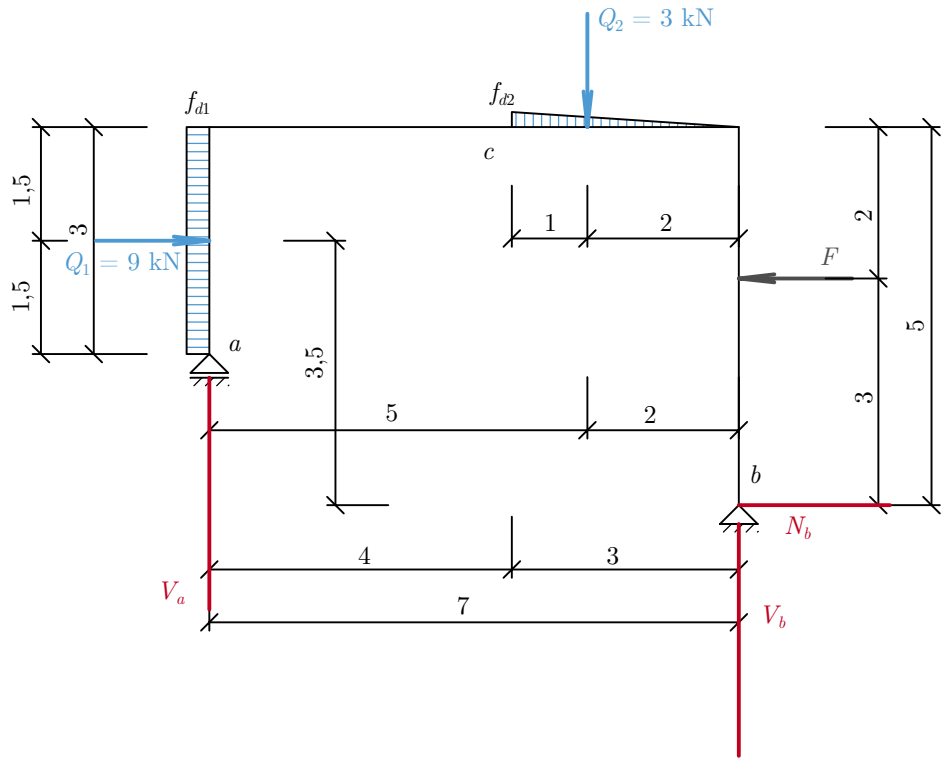
Příklad 5.4.5.1

Zadání:



Řešení:

Paprsky reakcí, náhradní břemena



Výpočet

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\ Q_1 - F + N_b &= 0 \\ 9 - 4 + N_b &= 0 \\ N_b &= -5\,\text{kN} \leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\ V_a \cdot 7 + Q_1 \cdot 3,5 - Q_2 \cdot 2 - F \cdot 3 &= 0 \\ V_a \cdot 7 + 9 \cdot 3,5 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 &= 0 \\ V_a &= -1,929\,\text{kN} \curvearrowleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ia} &= 0 \\
Q_1 \cdot 1,5 + Q_2 \cdot 5 - F \cdot 1 + N_b \cdot 2 + V_b \cdot 7 &= 0 \\
9 \cdot 1,5 + 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + V_b \cdot 7 &= 0 \\
V_b &= -4,929\,\text{kN} \curvearrowleft
\end{aligned}$$

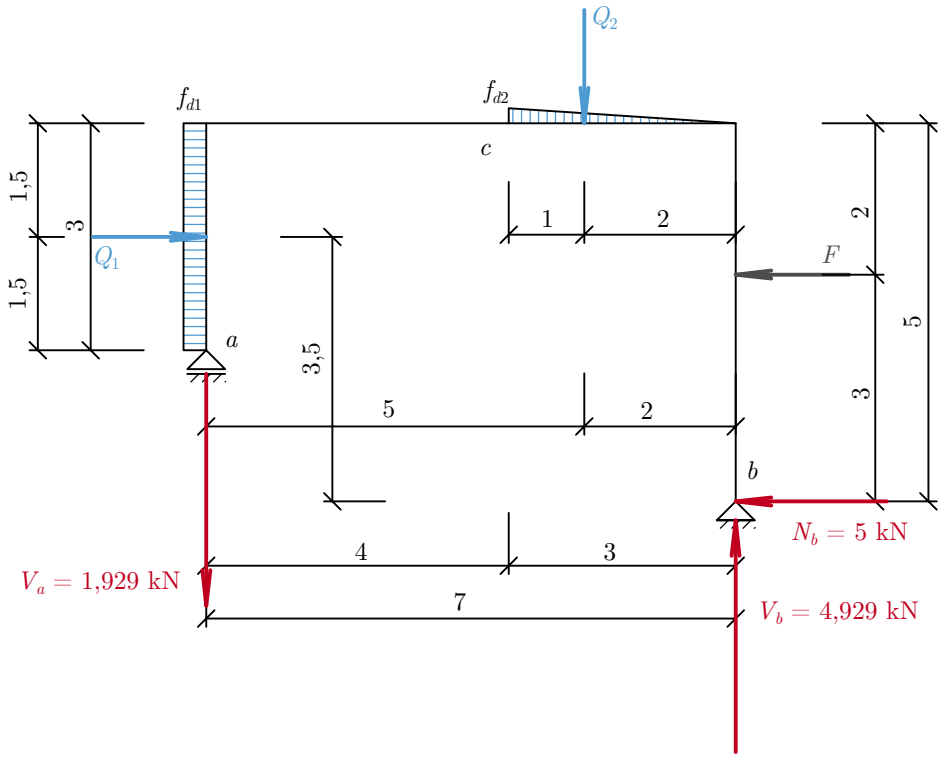
Zkouška

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\
-V_a - Q_2 + V_b &= 0 \\
-1,929 - 3 + 4,929 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

nebo provedeme zkoušku k libovolně zvolenému momentovému středu, abychom si ověřili skutečně všechny složky. Např.

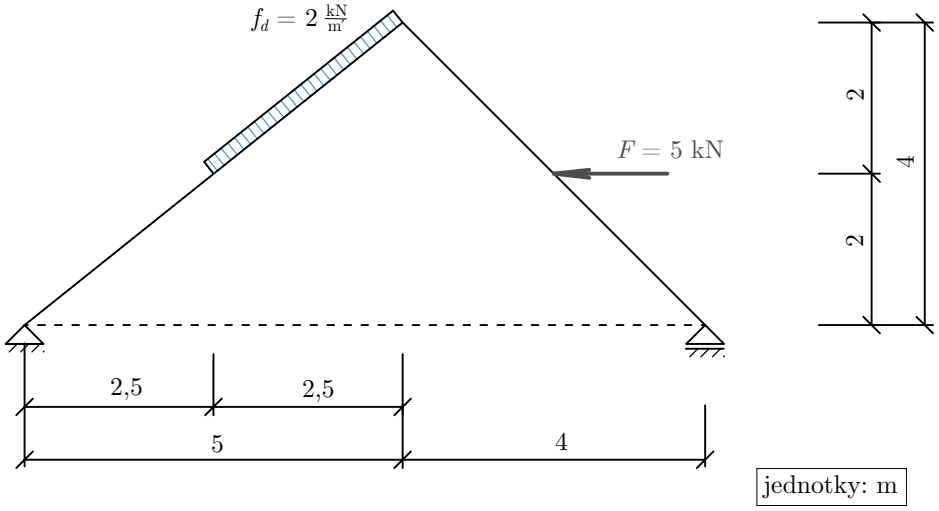
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M_{ic} &= 0 \\
-V_a \cdot 4 - Q_1 \cdot 1,5 + Q_2 \cdot 1 + F \cdot 2 + N_b \cdot 5 - V_b \cdot 3 &= 0 \\
-1,929 \cdot 4 - 9 \cdot 1,5 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 - 4,929 \cdot 3 &= 0 \\
-0,003 &\doteq 0
\end{aligned}$$

Zakreslení výsledků



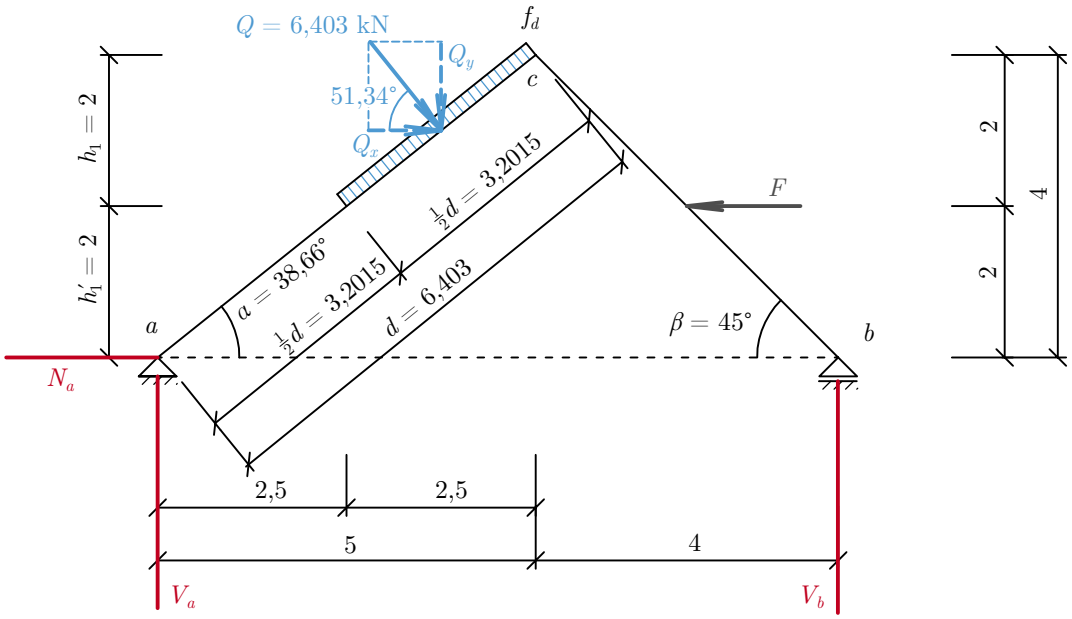
Příklad 5.4.5.2

Zadání:



Řešení:

Paprsky reakcí, náhradní břemena, rozklad sil



$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{4}{5} = 0,8 \\ \alpha &= 38,66^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 38,66^\circ &= \frac{h_1}{2,5} \\ h_1 &= 2,5 \tan 38,66^\circ = 2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 38,66^\circ &= \frac{5}{d} \\ d &= \frac{5}{\cos 38,66^\circ} = 6,403\,\mathrm{m} \\ \frac{d}{2} = d_1 = d'_1 &= \frac{2,5}{\cos 38,66^\circ} = 3,2015\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= f_d \cdot d_1' = 2 \cdot 3,2015 \\ Q &= 6,403\,\mathrm{kN} \\ Q_x &= Q\cos 51,34^\circ = 6,403\cos 51,34^\circ \\ Q_x &= 4\,\mathrm{kN} \\ Q_y &= Q\sin 51,34^\circ = 6,403\sin 51,34^\circ \\ Q_y &= 5\,\mathrm{kN} \end{aligned}$$

Výpočet

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0 \\ N_a + Q_x - F &= 0 \\ N_a + 4 - 5 &= 0 \\ N_a &= 1\,\mathrm{kN} \rightarrow \end{aligned}$$

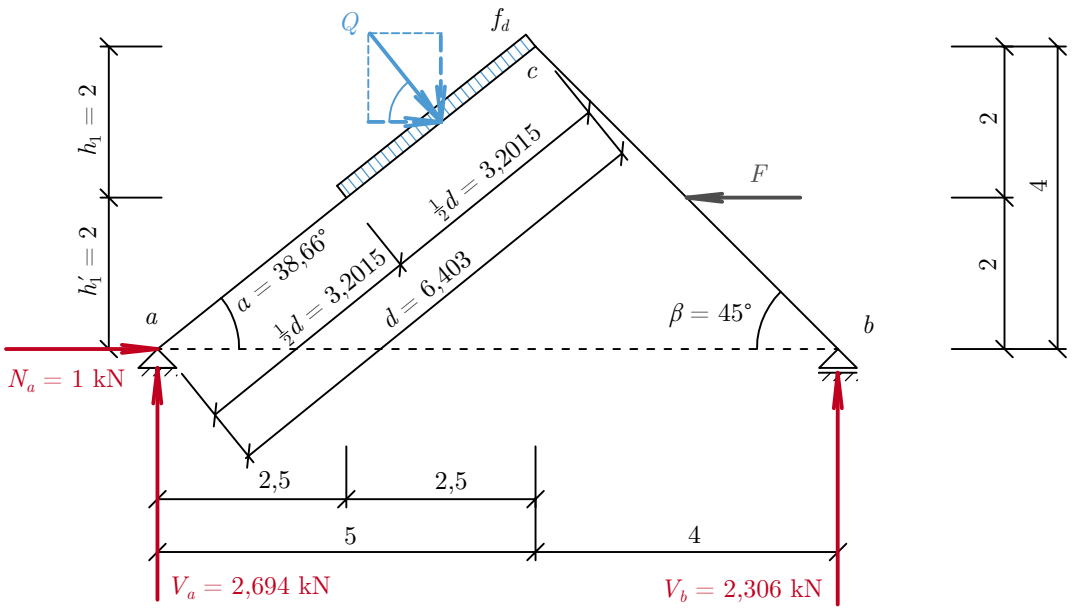
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ib} &= 0 \\ V_a \cdot 9 - Q_y \cdot 5,25 + Q_x \cdot 3 - F \cdot 2 &= 0 \\ V_a \cdot 9 - 5 \cdot 5,25 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 &= 0 \\ V_a &= 2,694\,\mathrm{kN} \curvearrowright \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0 \\ V_a - Q_y + V_b &= 0 \\ 2,694 - 5 + V_b &= 0 \\ V_b &= 2,306\,\mathrm{kN} \uparrow \end{aligned}$$

Zkouška

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ic} &= 0 \\ V_a \cdot 5 - Q \cdot \frac{3,2015}{2} + F \cdot 2 - V_b \cdot 4 - N_a \cdot 4 &= 0 \\ 2,694 \cdot 5 - 6,403 \cdot 1,60075 + 5 \cdot 2 - 2,306 \cdot 4 - 1 \cdot 4 &= 0 \\ -0,0036 &\doteq 0 \end{aligned}$$

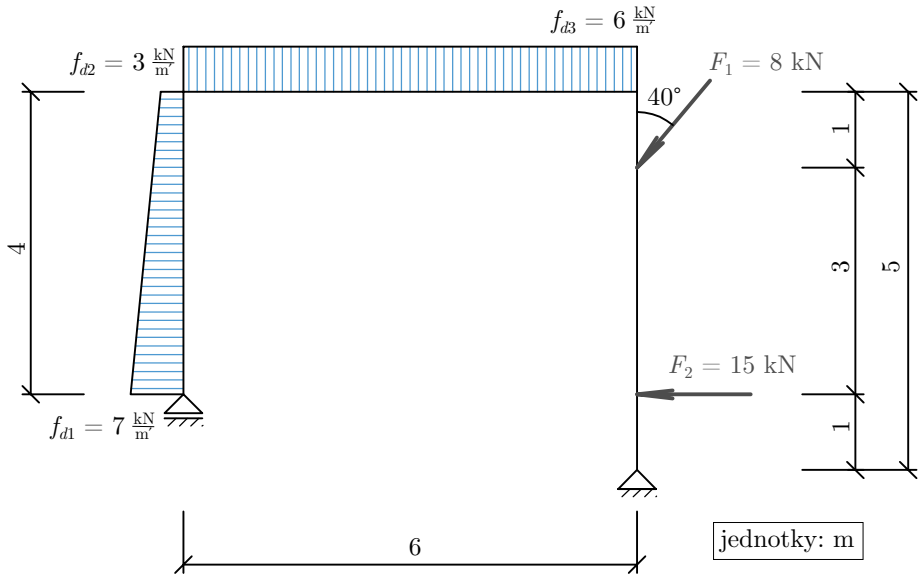
Zakreslení výsledků



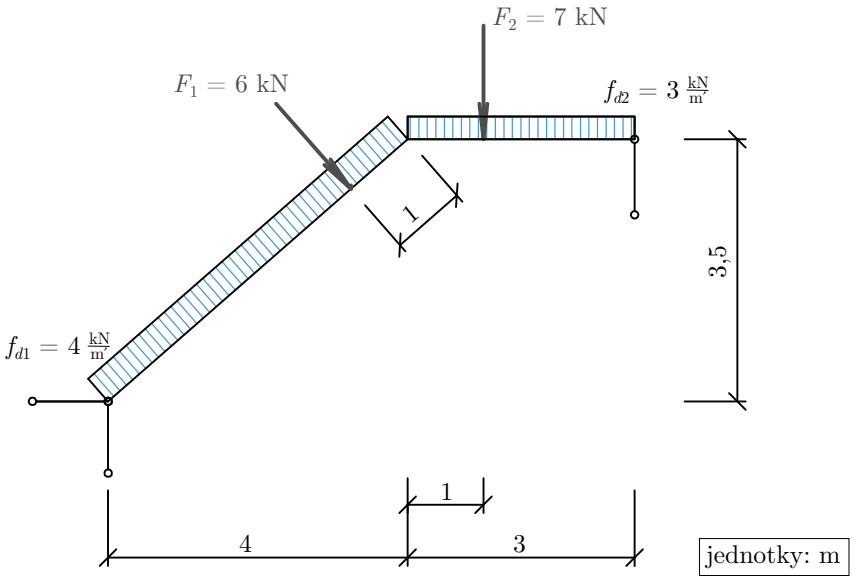
Příklady k procvičení

Dejte do rovnováhy tyto soustavy sil.

5.4.5.A



5.4.5.B


$F_2 = 7$ kN
$F_1 = 6$ kN
$f_{d2} = 3\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$
$f_{d1} = 4\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$
1
3,5
1
4
3
jednotky: m

6 Klíče k příkladům k procvičení

1.1.A

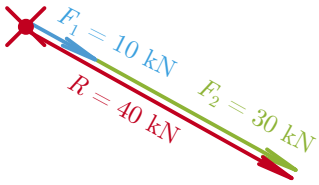
$R = 500 + 300 = 800\,\mathrm{N}$

1.1.B

$R = 200 + 800 = 1\,000\,\mathrm{N}$

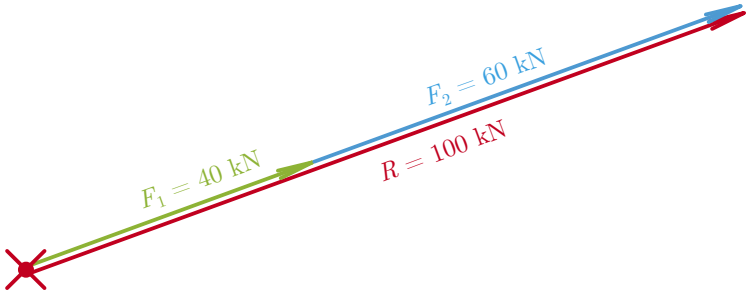
1.1.C

$R = 10 + 30 = 40\,\mathrm{kN}$



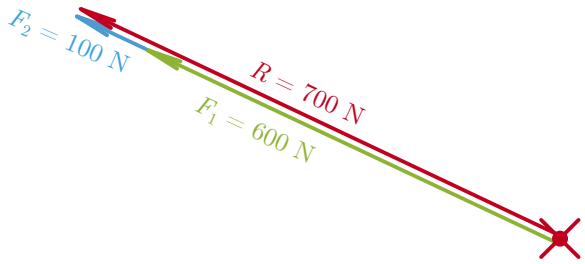
1.1.D

$R = 40 + 60 = 100\,\mathrm{kN}$



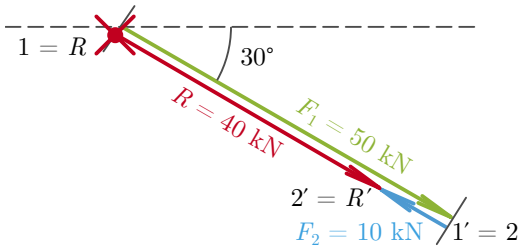
1.1.E

$R = 600 + 100 = 700\,\mathrm{N}$



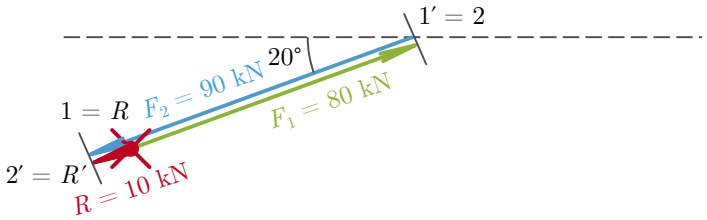
1.2.A

$R = 50 - 10 = 40\,\mathrm{kN}$



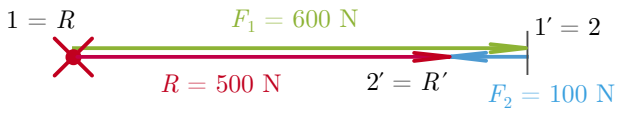
1.2.B

$R = 80 - 90 = -10\,\mathrm{kN}$



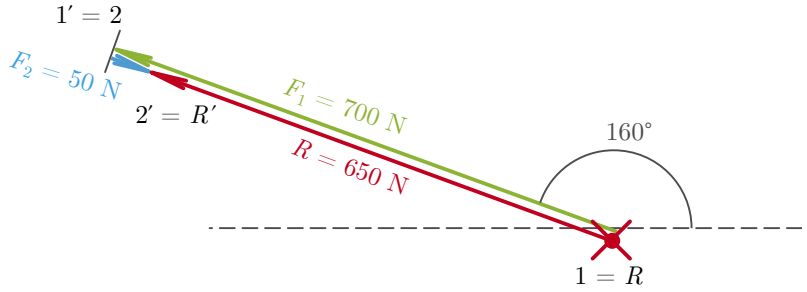
1.2.C

$R = 600 - 100 = 500\,\mathrm{N}$



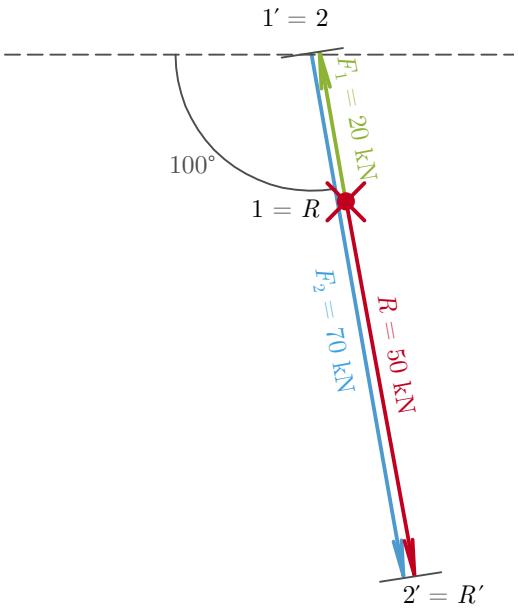
1.2.D

$R = -700 + 50 = -650\,\mathrm{N}$


1′ = 2
F2 = 50 N
2′ = R′
F1 = 700 N
R = 650 N
160°
1 = R

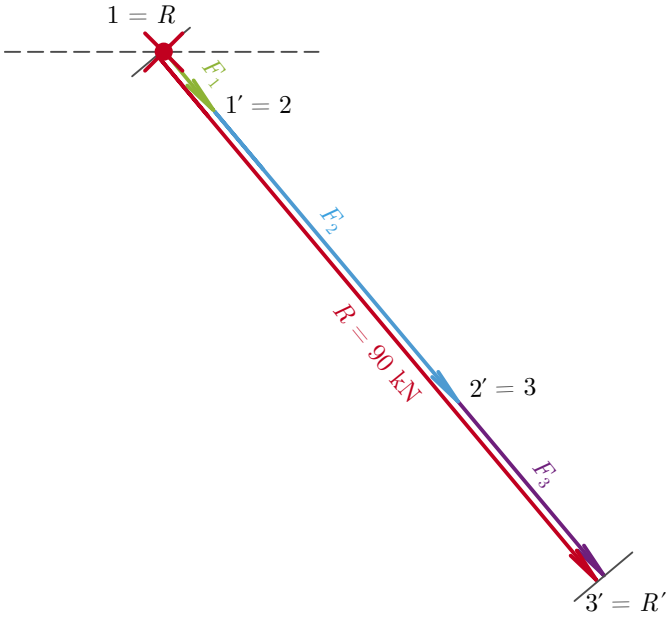
1.2.E

$R = -20 + 70 = 50\,\mathrm{kN}$



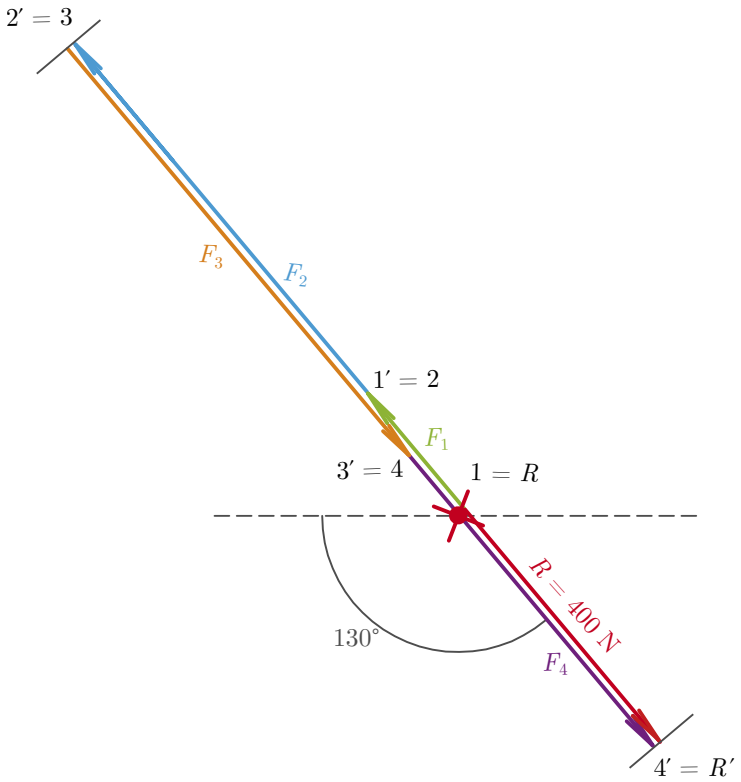
1.3.A

$R = 10 + 50 + 30 = 90\,\mathrm{kN}$



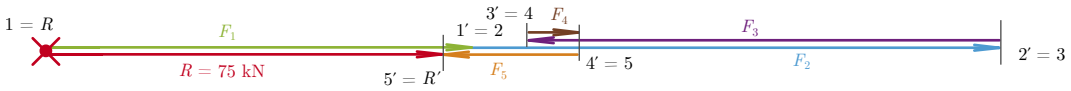
1.3.B

$R = -200 - 600 + 700 + 500 = 400\,\mathrm{N}$



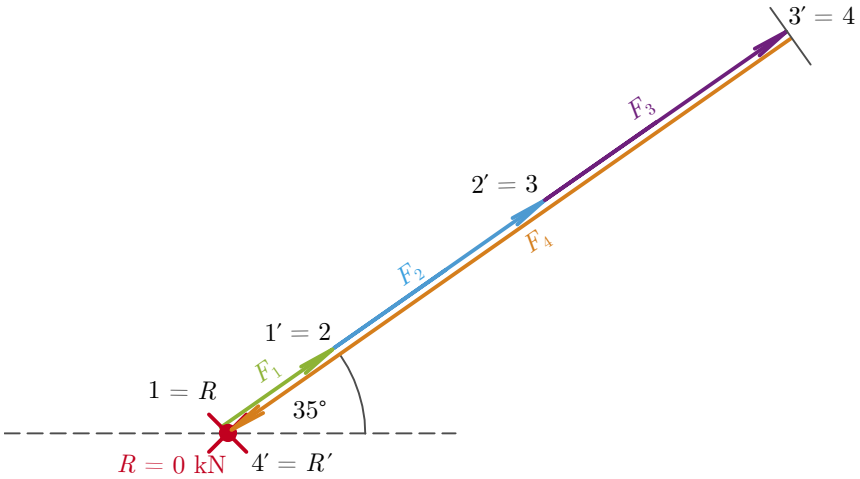
1.3.C

$R = 80 + 100 - 90 + 10 - 25 = 75\,\mathrm{kN}$



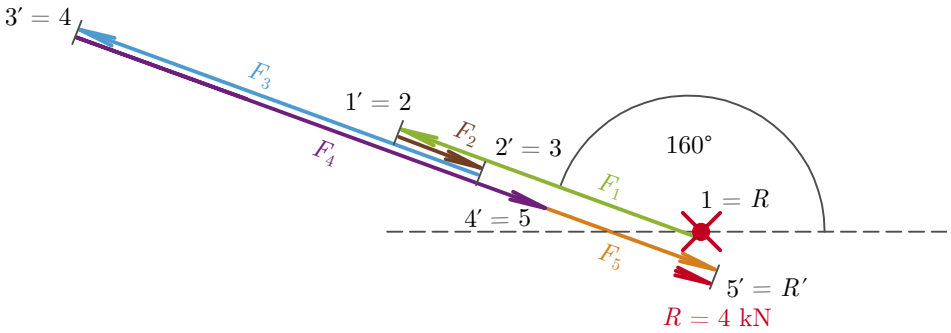
1.3.D

$R = 18 + 34 + 40 - 92 = 0\,\mathrm{kN}$



1.3.E

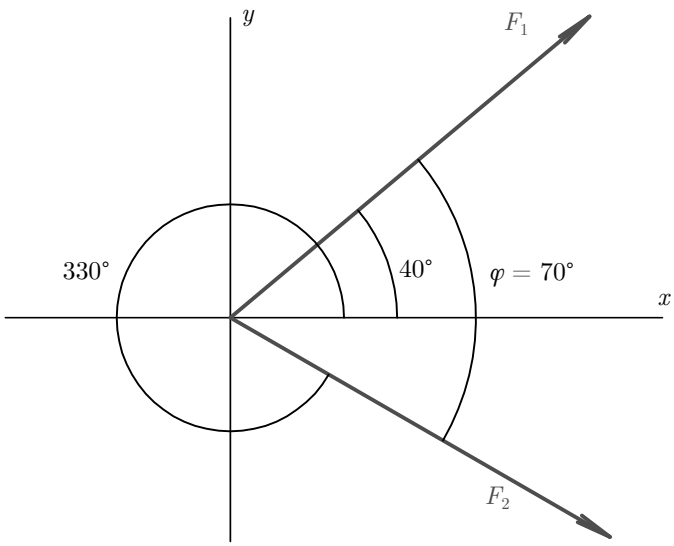
$R = -42 + 12 - 56 + 66 + 24 = 4\,\mathrm{kN}$



2.1.A

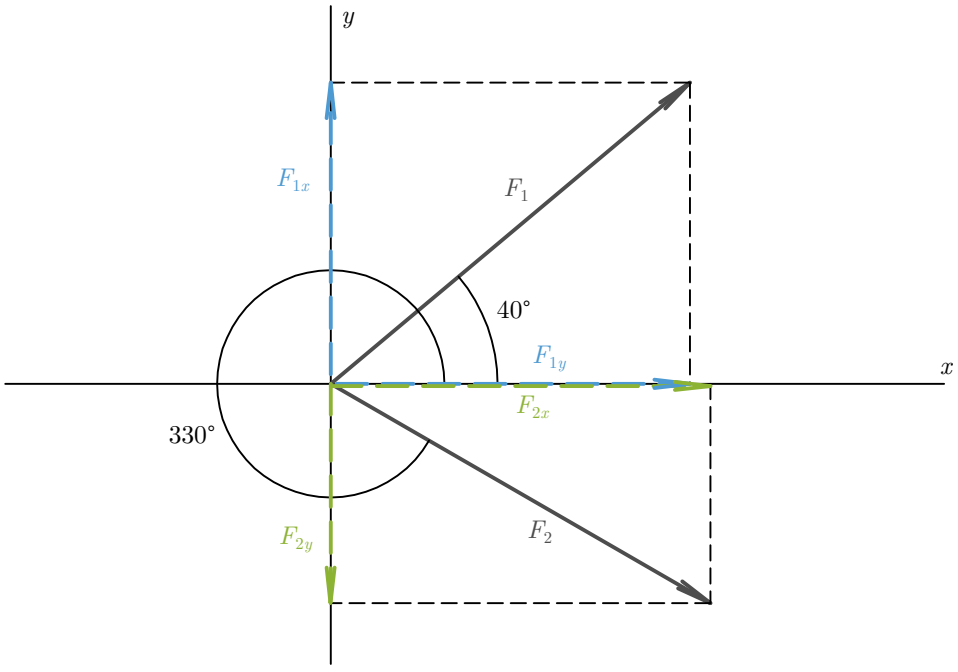
Početní řešení:

a) Cosinova věta



$R = \sqrt{620^2 + 580^2 - 2 \cdot 620 \cdot 580 \cdot \cos(180° - 70°)} = 983,25\,\mathrm{N}$

b) rozkladem sil



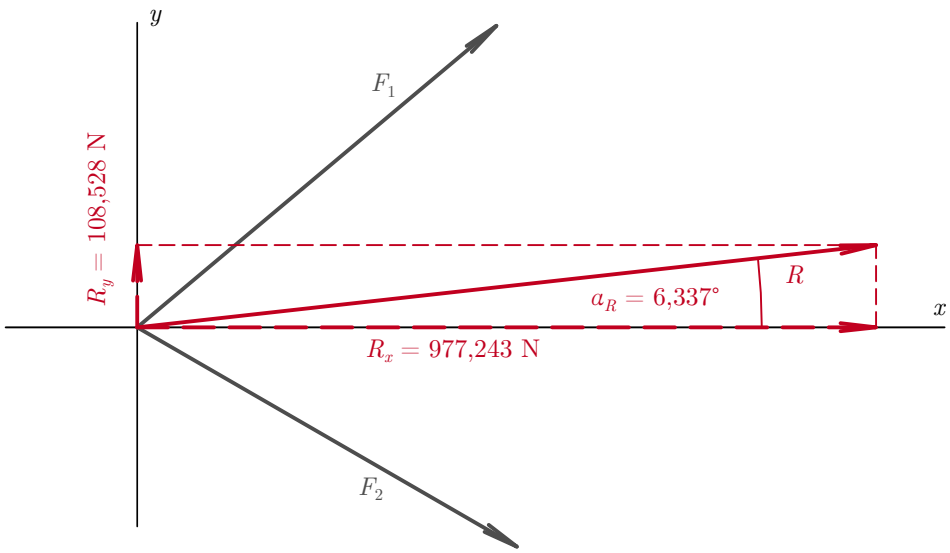
$F_{1x} = 620 \cos 40° = 474,948\,\text{N} \rightarrow$; $F_{1y} = 620 \sin 40° = 398,528\,\text{N} \uparrow$

$F_{2x} = 580 \cos 30° = 502,295\,\text{N} \rightarrow$; $F_{2y} = 580 \sin 30° = 290\,\text{N} \downarrow$

$R_x = 474,948 + 502,295 = 977,243\,\text{N} \rightarrow$; $R_y = 398,528 - 290 = 108,528\,\text{N} \uparrow$

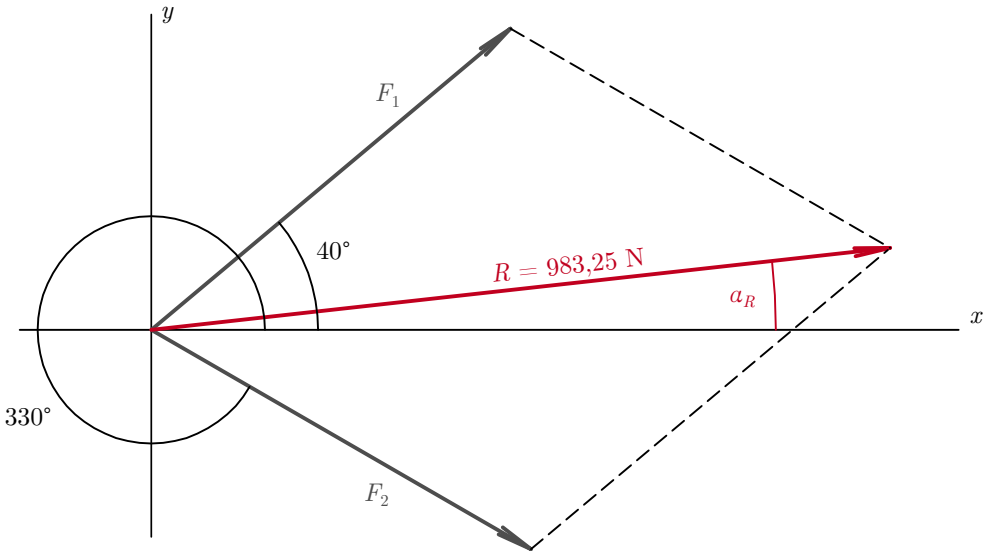
$R = \sqrt{977,243^2 + 108,528^2} = 983,25\,\text{N}$

$\tan \alpha_R = \frac{108,528}{977,243} = 0,1111$; $\alpha_R = 6,337°$

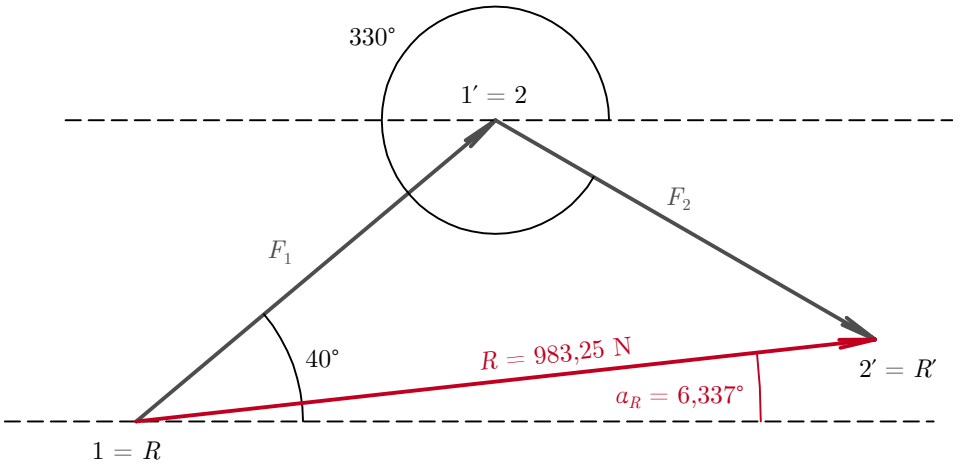


Grafické řešení:

a) rovnoběžník sil



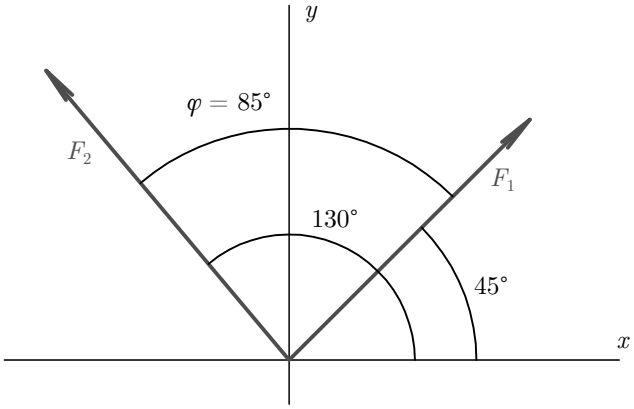
b) složkovou čarou



2.1.B

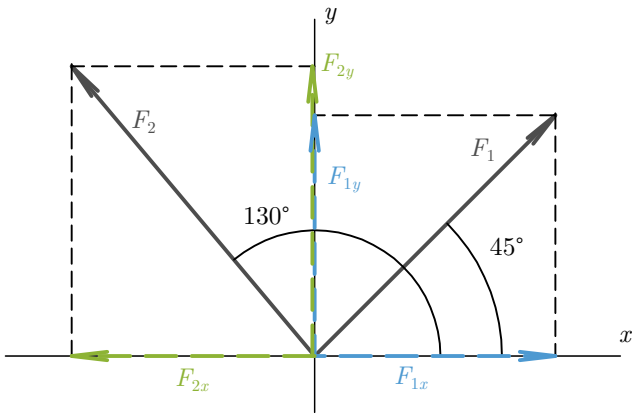
Početní řešení:

a) Cosinova věta



$$R = \sqrt{450^2 + 500^2 - 2 \cdot 450 \cdot 500 \cdot \cos\left(180° - 85°\right)} = 701,23\,\mathrm{N}$$

b) rozkladem sil



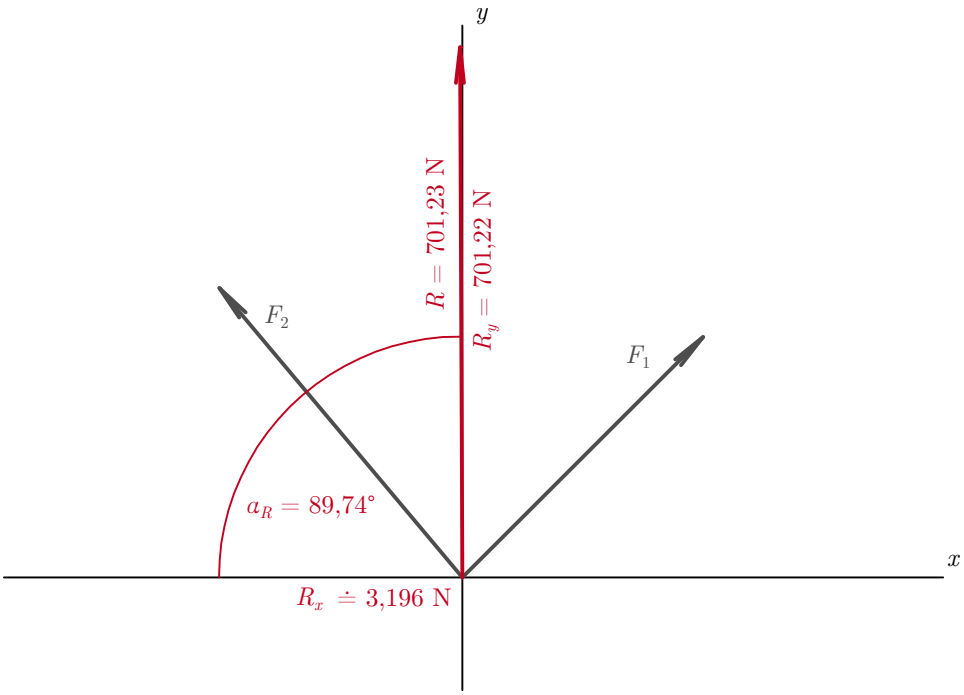
$F_{1x} = 450 \cos 45° = 318,198\,\text{N} \rightarrow$; $F_{1y} = 450 \sin 45° = 318,198\,\text{N} \uparrow$

$F_{2x} = 500 \cos 50° = 321,394\,\text{N} \leftarrow$; $F_{2y} = 500 \sin 50° = 383,022\,\text{N} \uparrow$

$R_x = 318,198 - 321,394 = -3,196\,\text{N} \leftarrow$; $R_y = 318,198 + 383,022 = 701,22\,\text{N} \uparrow$

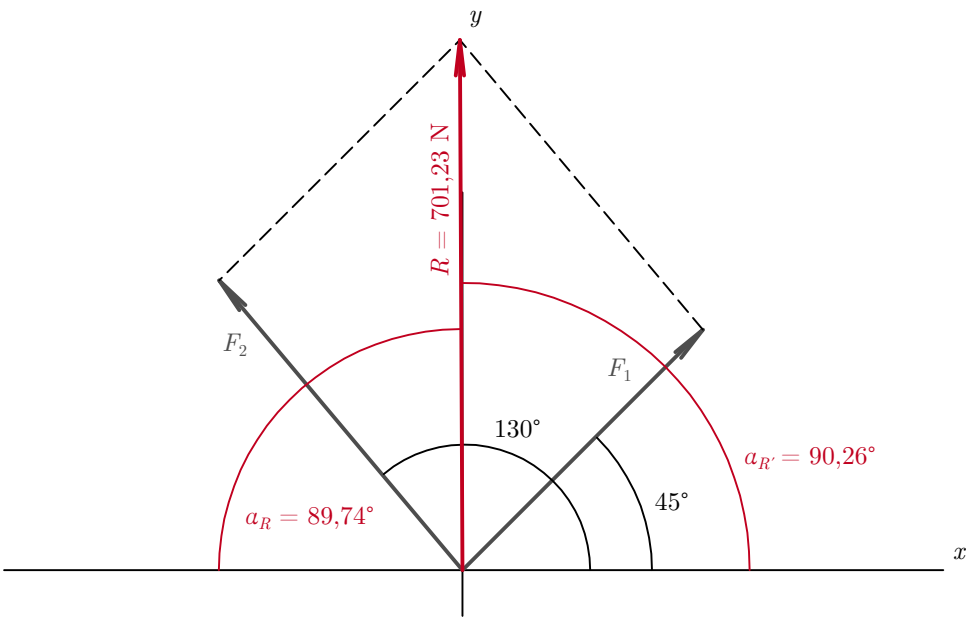
$R = \sqrt{(-3,196)^2 + 701,22^2} = 701,23\,\text{N}$

$\tan \alpha_R = \frac{701,22}{-3,196} = -219,408$; $\alpha_R = -89,74°$

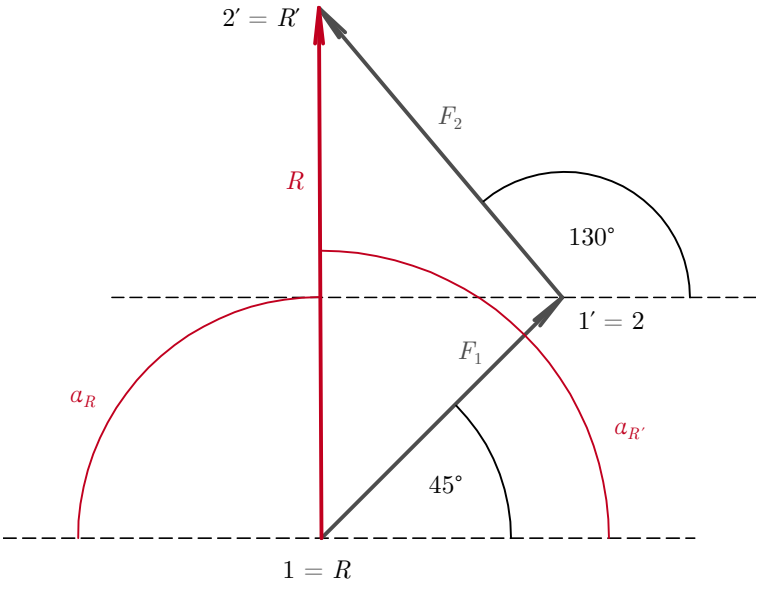


Grafické řešení:

a) rovnoběžník sil



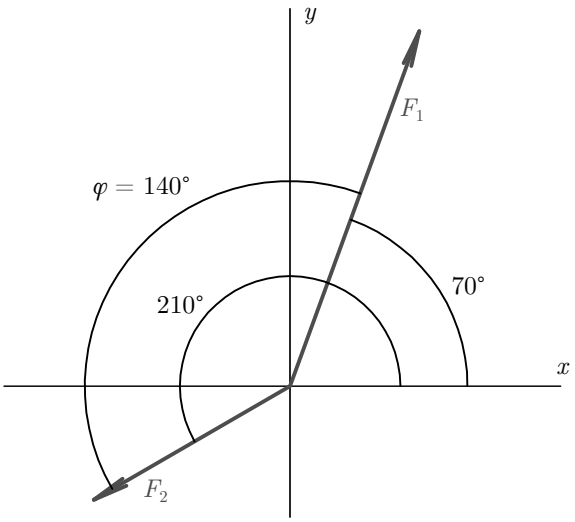
b) složková čára



2.1.C

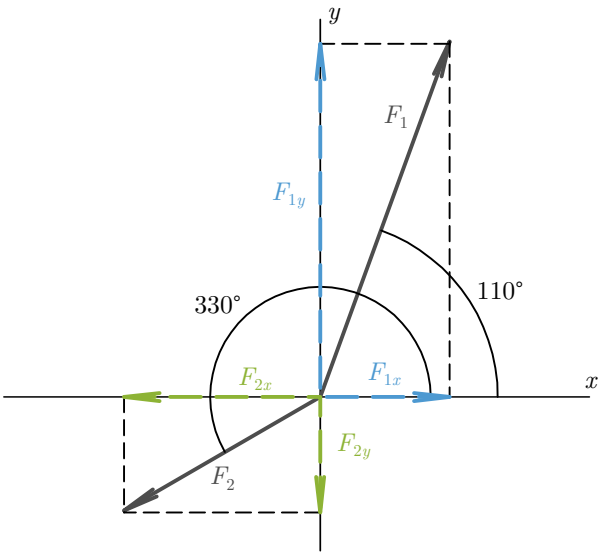
Početní řešení:

a) Cosinova věta



$R = \sqrt{500^2 + 300^2 - 2 \cdot 500 \cdot 300 \cdot \cos(180° - 140°)} = 331,94\,\mathrm{N}$

b) rozkladem sil



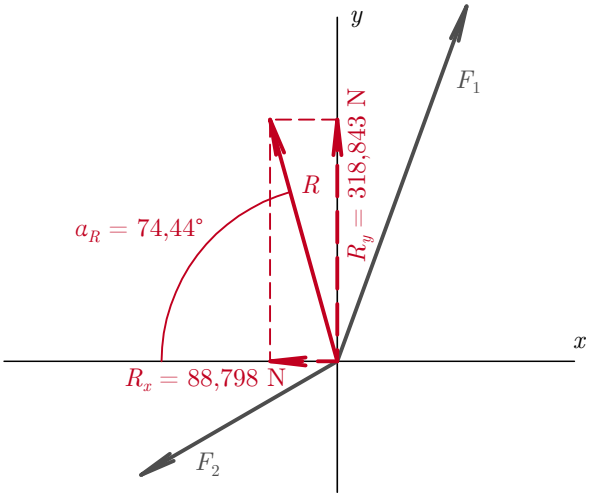
$F_{1x} = 500 \cos 70° = 171,01\,\mathrm{N} \rightarrow$; $F_{1y} = 500 \sin 70° = 469,846\,\mathrm{N} \uparrow$

$F_{2x} = 300 \cos 30° = 259,808\,\mathrm{N} \leftarrow$; $F_{2y} = 300 \sin 30° = 1560\,\mathrm{N} \downarrow$

$R_x = 171,01 - 259,808 = -88,798\,\mathrm{N} \leftarrow$; $R_y = 468,846 - 150 = 318,846\,\mathrm{N} \uparrow$

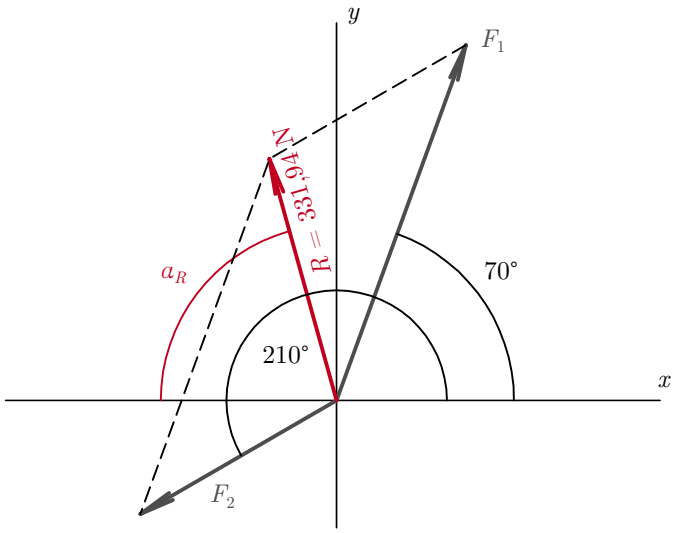
$R = \sqrt{(-88,798)^2 + 318,846^2} = 331,94\,\mathrm{N}$

$\tan \alpha_R = \frac{318,846}{-88,798} = -3,5907;\ \alpha_R = -74,44°$

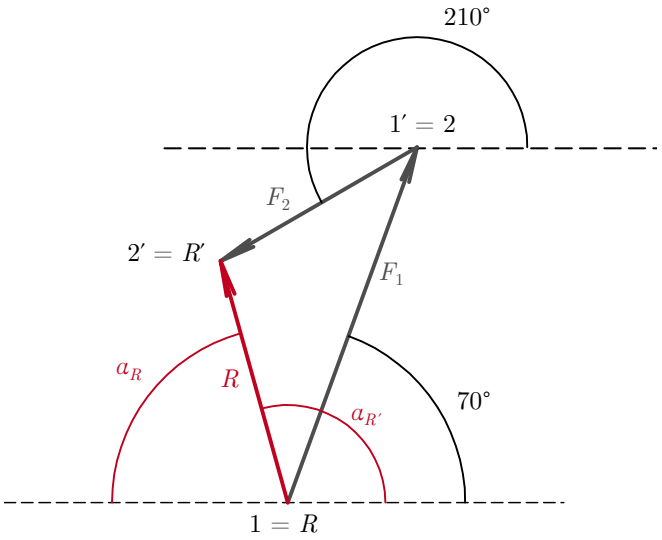


Grafické řešení:

a) rovnoběžník sil



b) složková čára



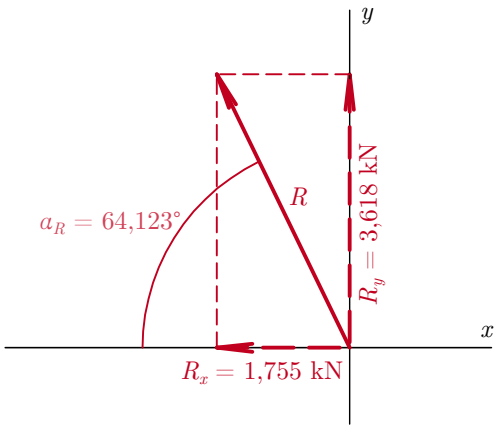
2.2.A

$R_x = 5\cos 45° + 4\cos 100° + 6\cos 220° = -1,755\,\text{kN} \leftarrow$

$R_y = 5\sin 45° + 4\sin 100° + 6\sin 220° = 3,618\,\text{kN} \uparrow$

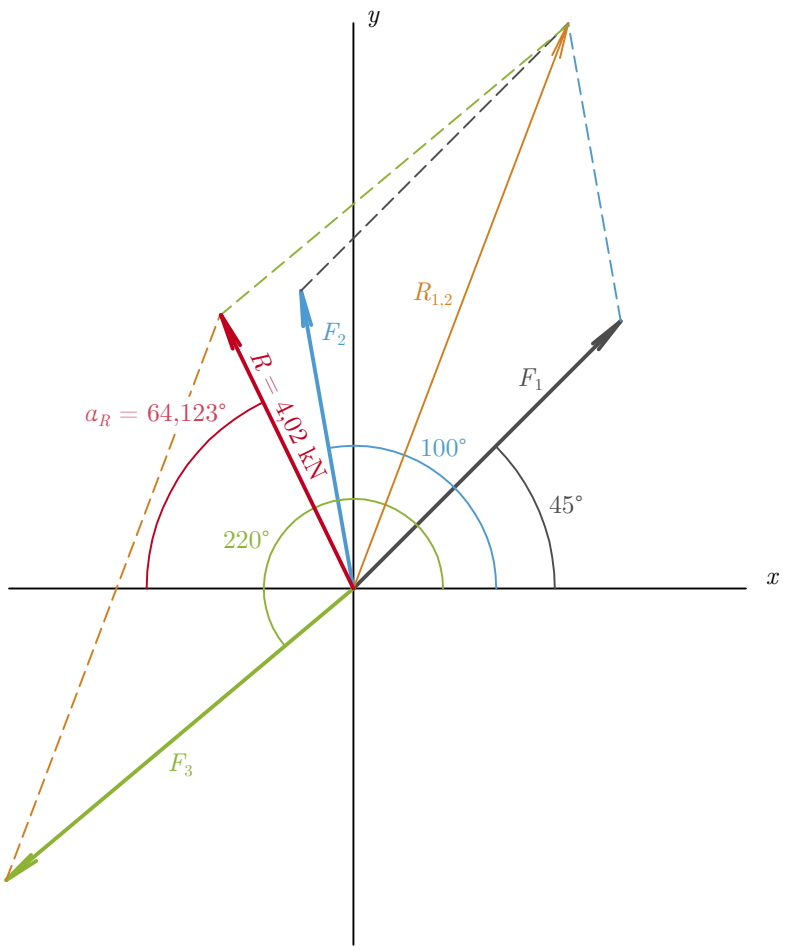
$R = \sqrt{(-1,755)^2 + 3,618^2} = 4,02\,\text{kN}$

$\tan \alpha_R = \frac{3,618}{-1,755} = -2,062;\ \alpha_R = -64,123°$

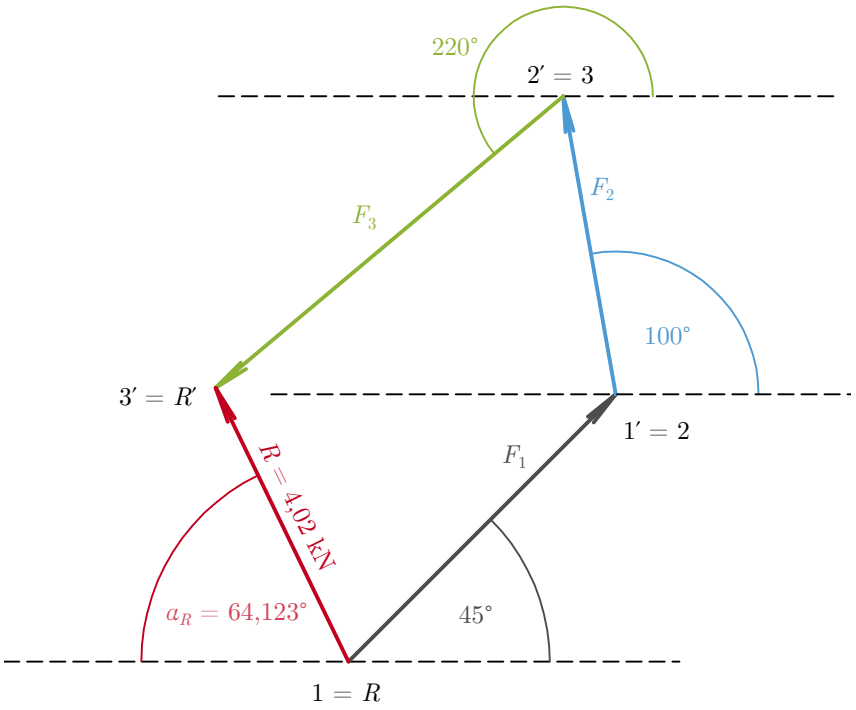


Grafické řešení:

a) rovnoběžník sil



b) složková čára



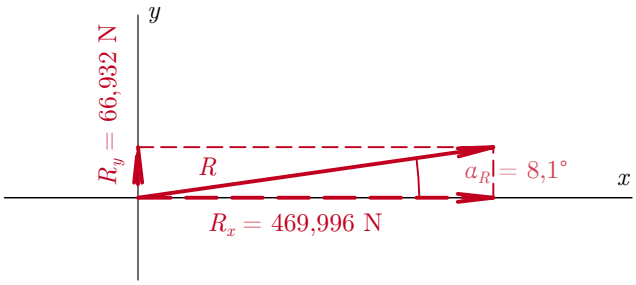
2.2.B

$R_x = 860\cos 15° + 430\cos 50° + 810\cos 190° + 380\cos 295° = 469,996\,\text{N} \rightarrow$

$R_y = 860\sin 15° + 430\sin 50° + 810\sin 190° + 380\sin 295° = 66,932\,\text{kN} \uparrow$

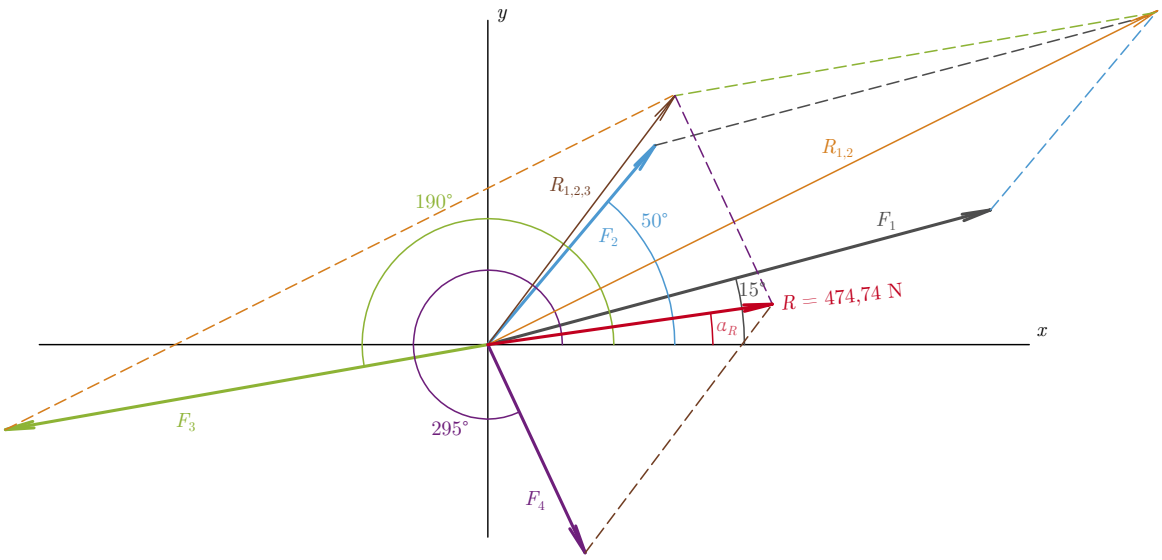
$R = \sqrt{469,996^2 + 66,932^2} = 474,74\,\text{N}$

$\tan\alpha_R = \frac{66,932}{469,996} = 0,1424;\ \alpha_R = 8,1°$

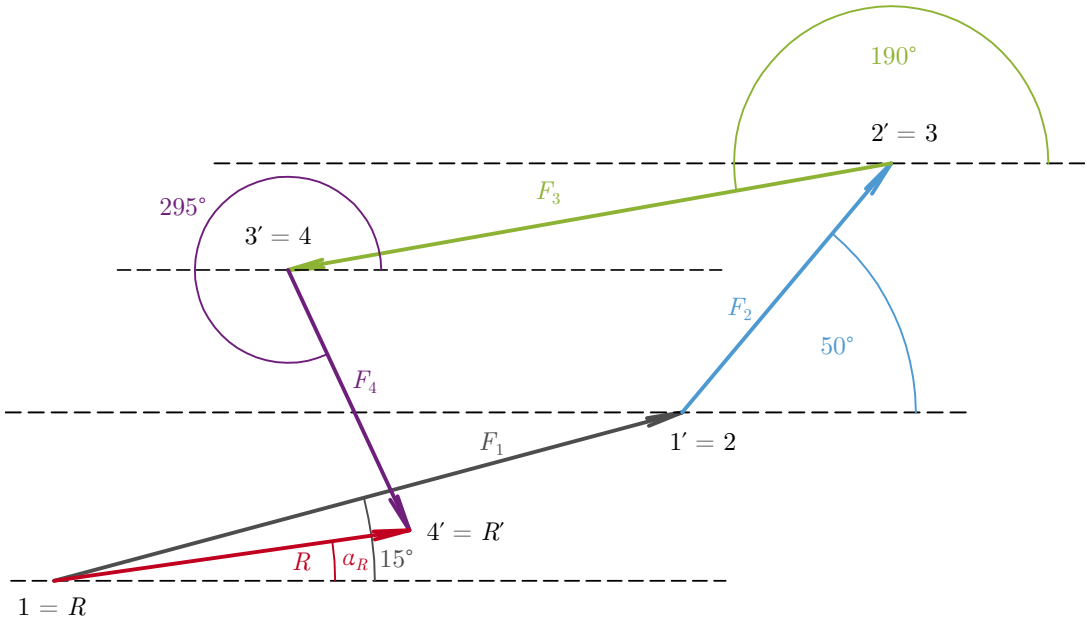


Grafické řešení:

a) rovnoběžník sil



b) složková čára



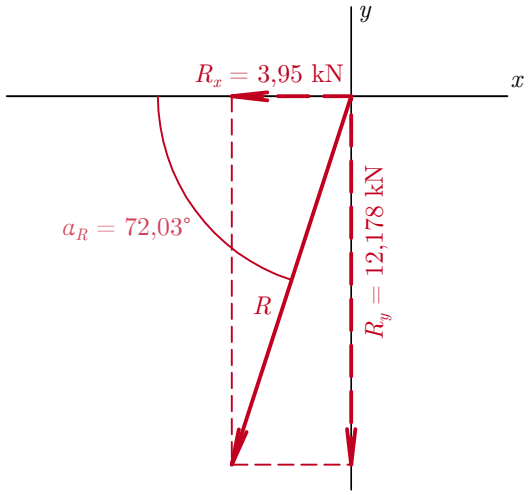
2.2.C

$R_x = 10\cos 100° + 7\cos 240° + 9\cos 300° + 12\cos 270° + 5\cos 130° = -3,95\,\text{kN} \leftarrow$

$R_y = 10\sin 100° + 7\sin 240° + 9\sin 300° + 12\sin 270° + 5\sin 130° = -12,178\,\text{kN} \downarrow$

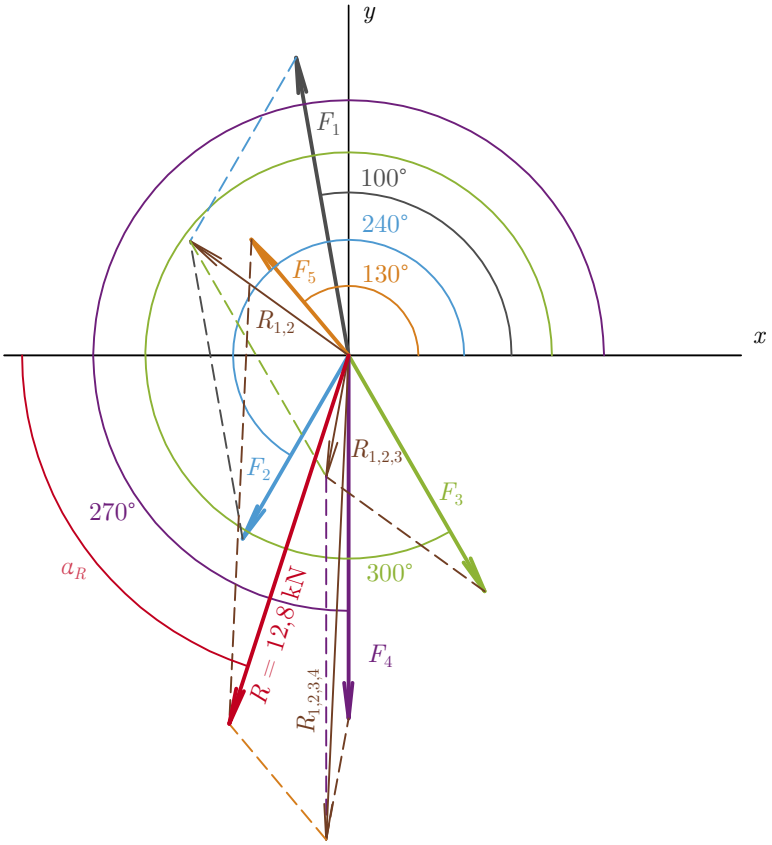
$R = \sqrt{(-3,95)^2 + (-12,178)^2} = 12,8\,\text{kN}$

$\tan \alpha_R = \frac{-12,178}{-3,95} = 3,083;\ \alpha_R = 72,03°$

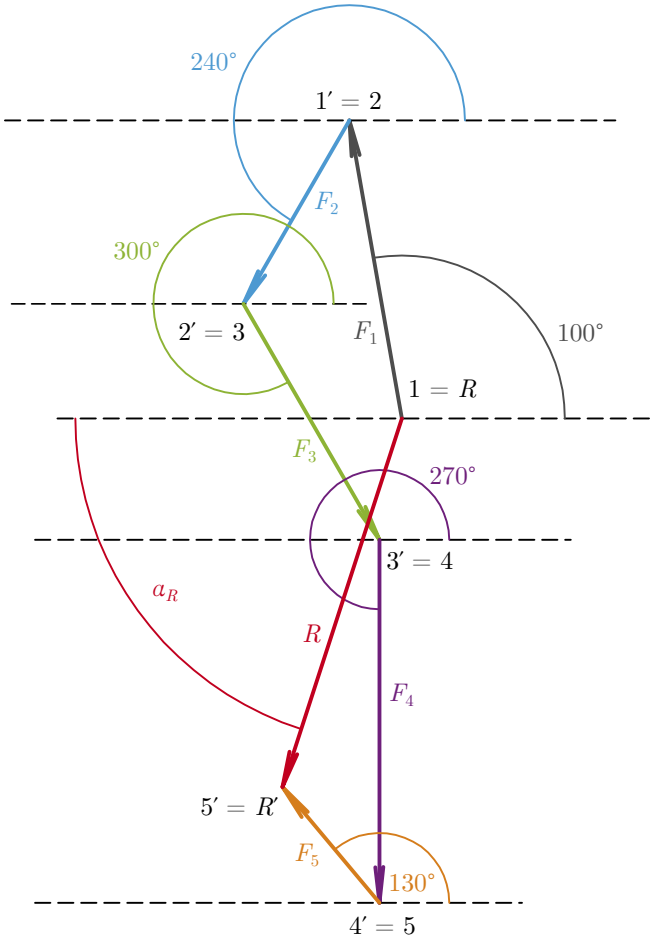


Grafické řešení:

a) rovnoběžník sil



b) složková čára



3.1.A

a) početně

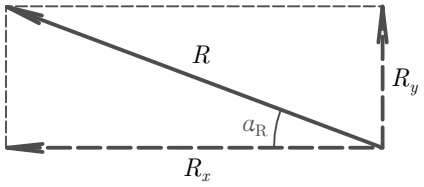
$F_{2x} = 4\cos 20° = 3,759\,\text{kN};\ F_{2y} = 4\sin 20° = 1,368\,\text{kN}$

$F_{3x} = 3\cos 40° = 2,298\,\text{kN};\ F_{3y} = 3\sin 40° = 1,928\,\text{kN}$

$R_x = 3,759 - 2,298 - 6 = -4,539\,\text{kN} \leftarrow$

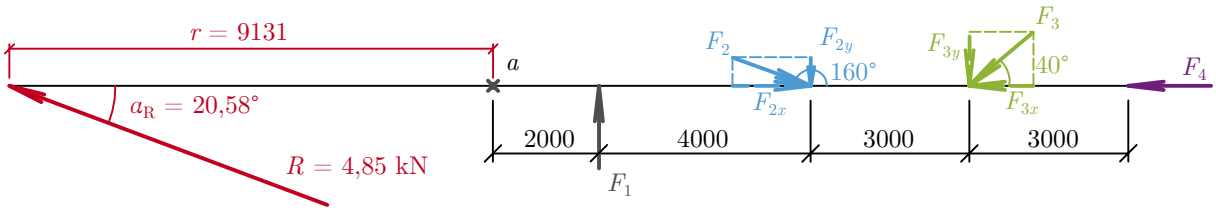
$R_y = 5 - 1,368 - 1,928 = 1,704\,\text{kN} \uparrow$

$R = \sqrt{(-4,539)^2 + 1,704^2} = 4,85\,\text{kN}$



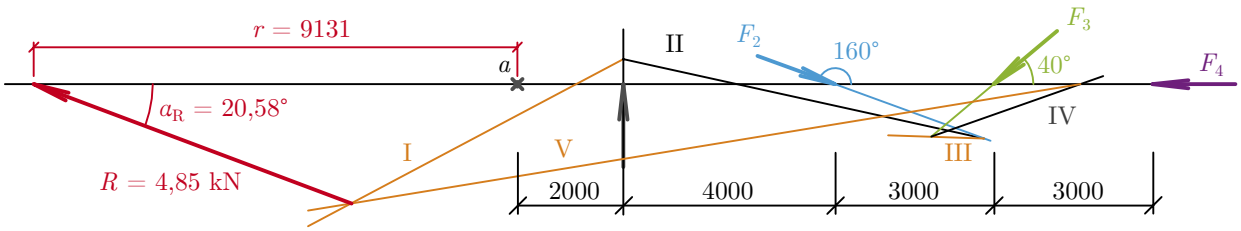
$\tan\alpha_R = \frac{1,704}{-4,539} = 0,3754;\ \alpha_R = 20,58°$

$1,704r = -5\cdot 2 + 1,368\cdot 6 + 1,928\cdot 9;\ r = 9,131\,\text{m}$

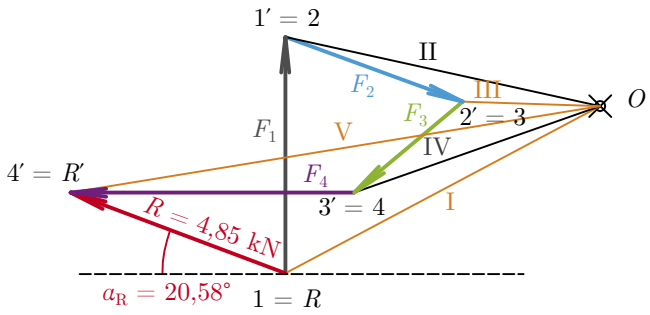


b) graficky

b1) výslednicová čára



b2) složková čára



3.1.B

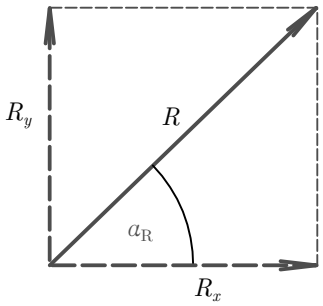
a) početně

$F_{2x} = 4\cos 20° = 3,759\,\text{kN};\ F_{2y} = 4\sin 20° = 1,368\,\text{kN}$

$R_x = 3,759\,\text{kN} \rightarrow$

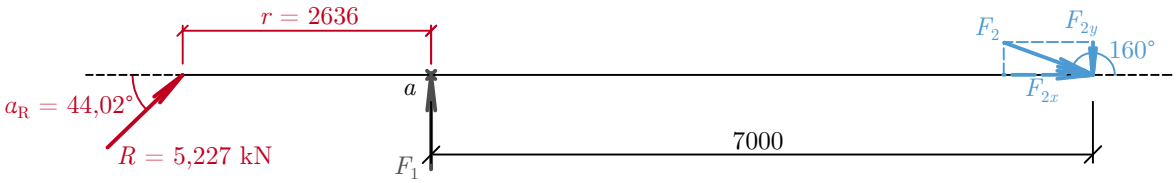
$R_y = 5 - 1,368 = 3,632\,\text{kN} \uparrow$

$R = \sqrt{3,759^2 + 3,632^2} = 5,227\,\text{kN}$



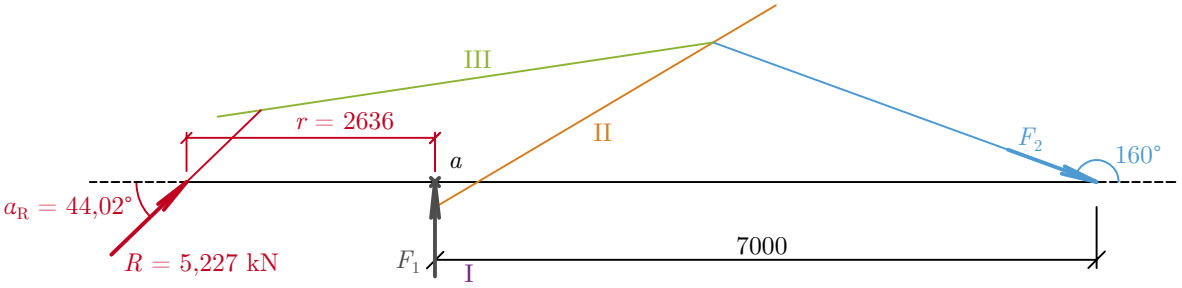
$\tan\alpha_R = \frac{3,632}{3,759} = 0,9662;\ \alpha_R = 44,02°$

$3,632r = 1,368 \cdot 7;\ r = 2,636\,\text{m}$

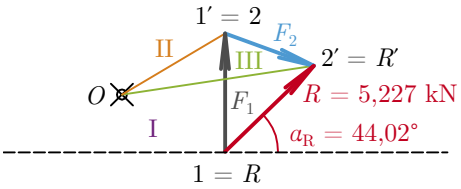


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára



3.1.C

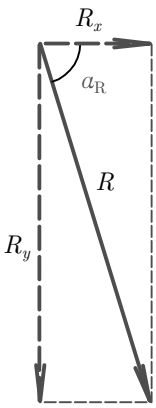
a) početní řešení

$F_{1x} = 6\cos 50° = 3,857\,\text{kN};\ F_{1y} = 6\sin 50° = 4,596\,\text{kN}$

$R_x = 3,857\,\text{kN} \rightarrow$

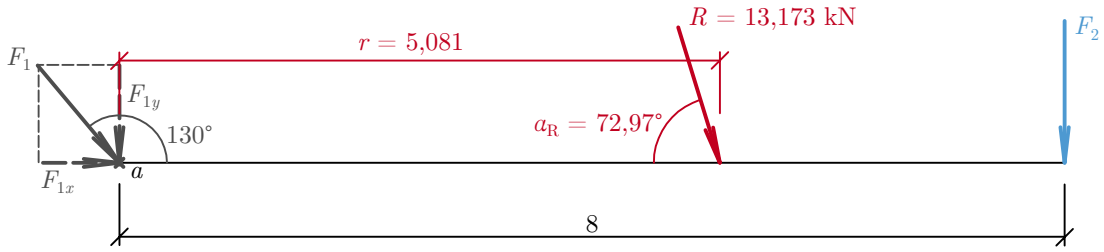
$R_y = -4,596 - 8 = -12,596\,\text{kN} \downarrow$

$R = \sqrt{3,857^2 + (-12,596)^2} = 13,173\,\text{kN}$



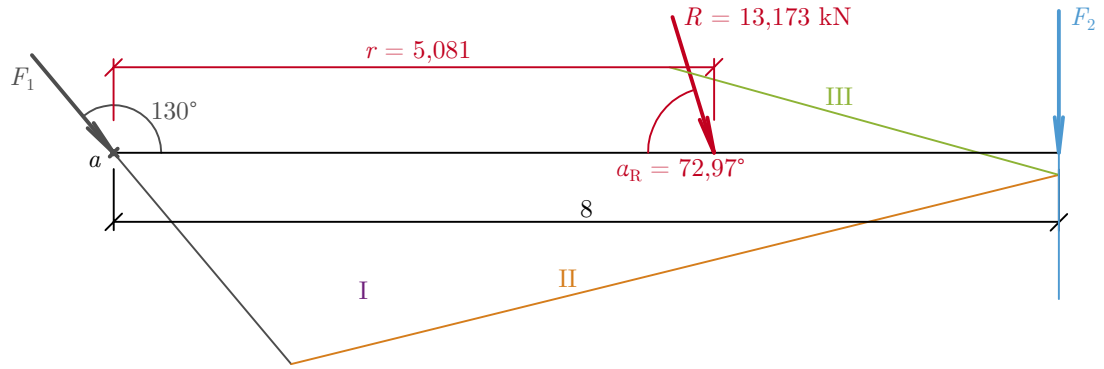
$\tan \alpha_R = \frac{-12,596}{3,857} = -3,266;\ \alpha_R = -72,97°$

$12,596r = 8 \cdot 8;\ r = 5,081\,\text{m}$

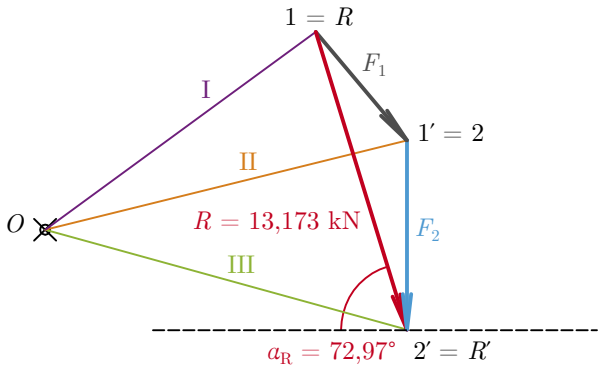


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára



3.1.D

a) početní řešení

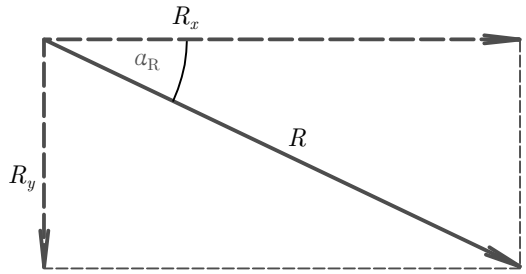
$F_{1x} = 4 \cos 50° = 2,571\,\text{kN};\ F_{1y} = 4 \sin 50° = 3,064\,\text{kN}$

$F_{3x} = 6\cos 40° = 4,596\,\text{kN};\ F_{3y} = 6\sin 40° = 3,857\,\text{kN}$

$R_x = -2,571 + 4,596 + 2 = 4,025\,\text{kN} \rightarrow$

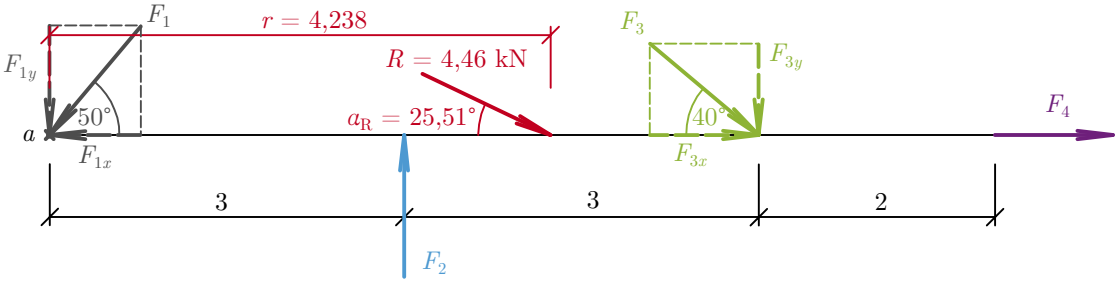
$R_y = -3,064 + 5 - 3,857 = -1,921\,\text{kN} \downarrow$

$R = \sqrt{4,025^2 + (-1,921)^2} = 4,46\,\text{kN}$



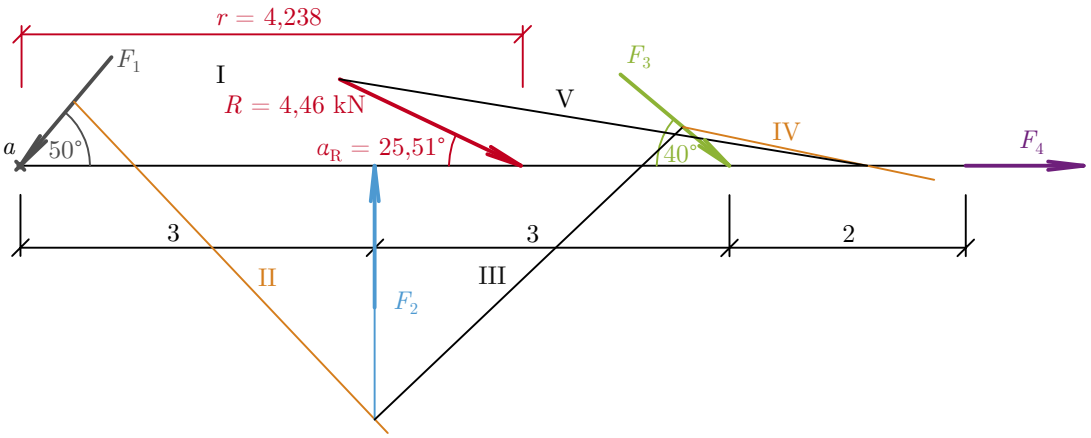
$\tan\alpha_R = \frac{-1,921}{4,025} = -0,477;\ \alpha_R = -25,51°$

$1,921r = -5 \cdot 3 + 3,857 \cdot 6;\ r = 4,238\,\text{m}$

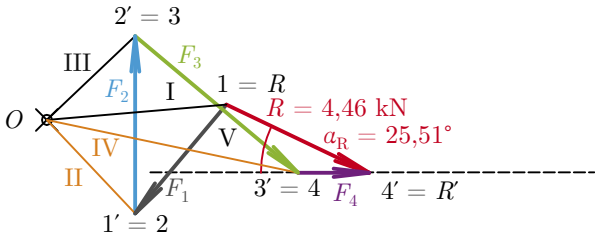


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

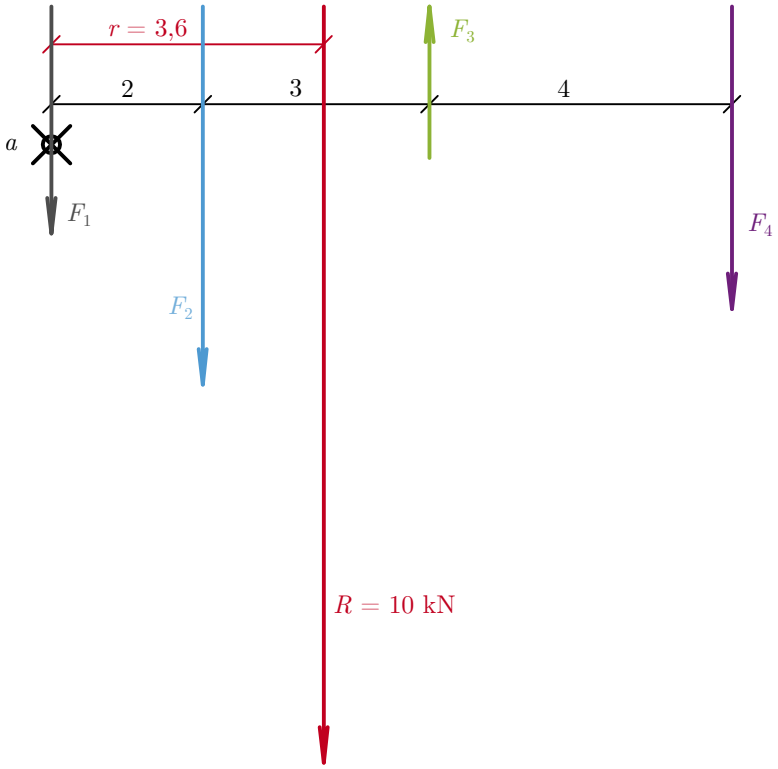


3.2.A

a) početní řešení

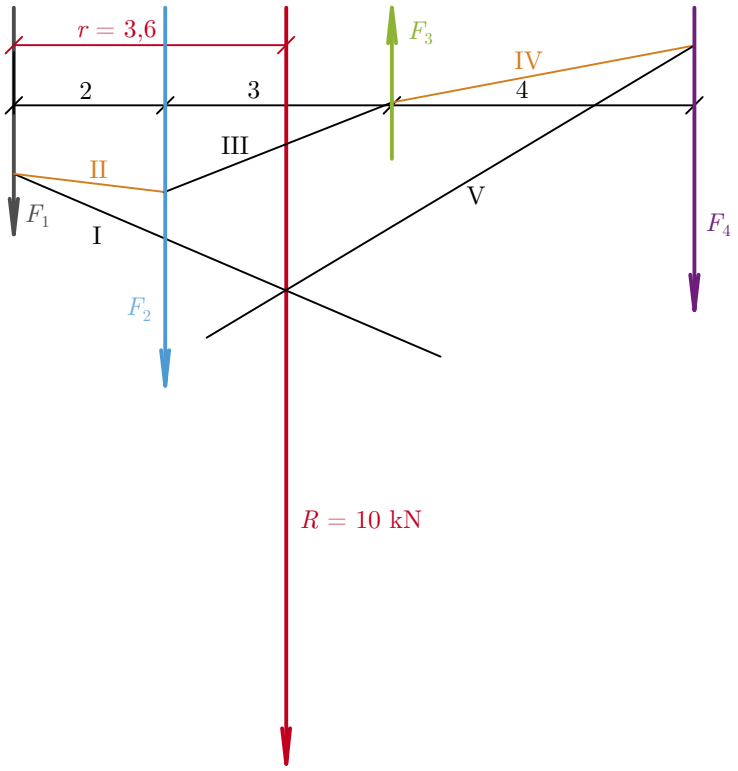
$R = -3 - 5 + 2 - 4 = -10\,\text{kN} \downarrow$

$10r = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 4 \cdot 9 \Rightarrow r = 3,6\,\text{m} \curvearrowright$

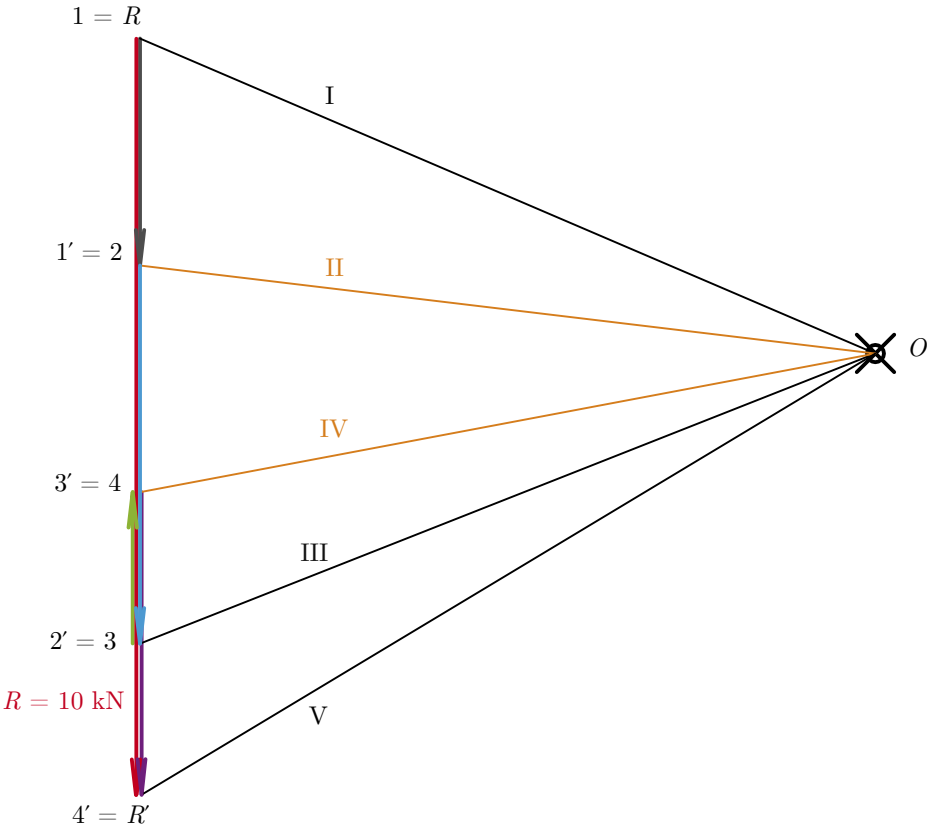


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

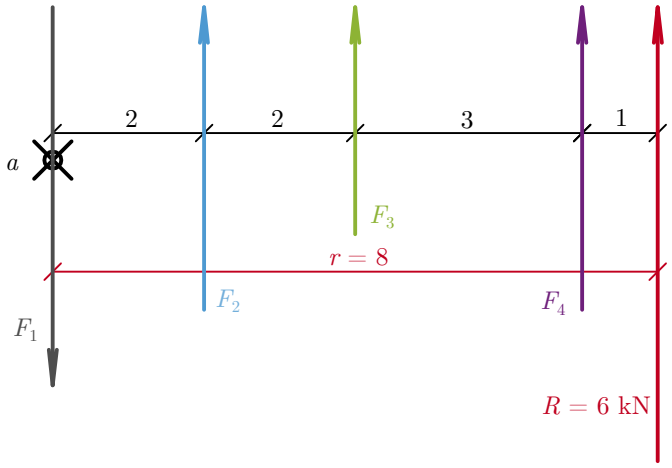


3.2.B

a) početní řešení

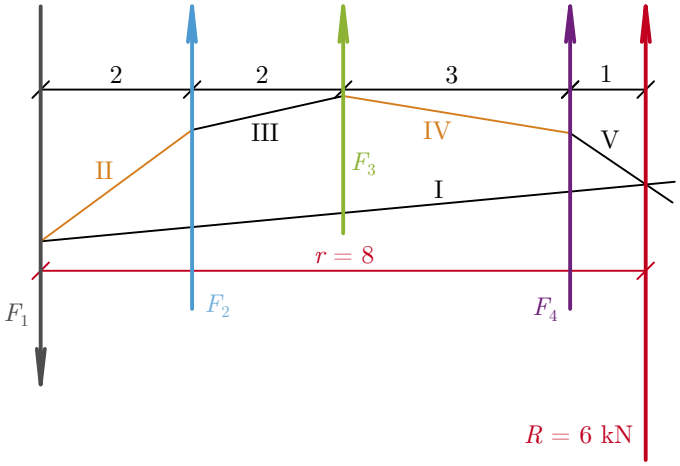
$R = -5 + 4 + 3 + 4 = 6\,\text{kN} \uparrow$

$6r = -4 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 7 \Rightarrow r = -8\,\text{m} \curvearrowleft$

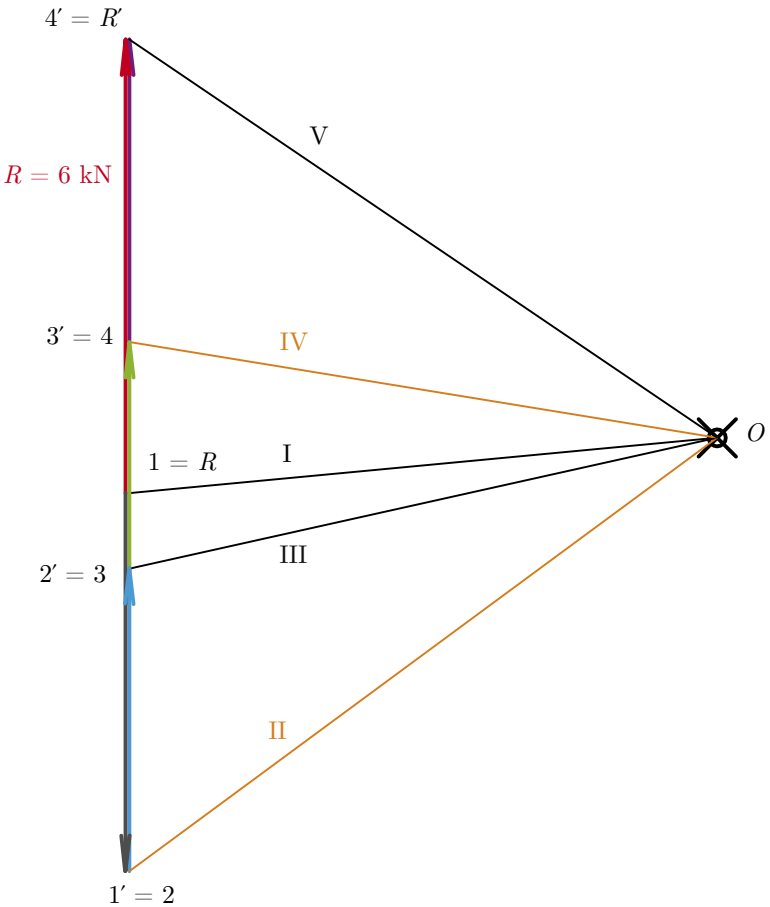


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

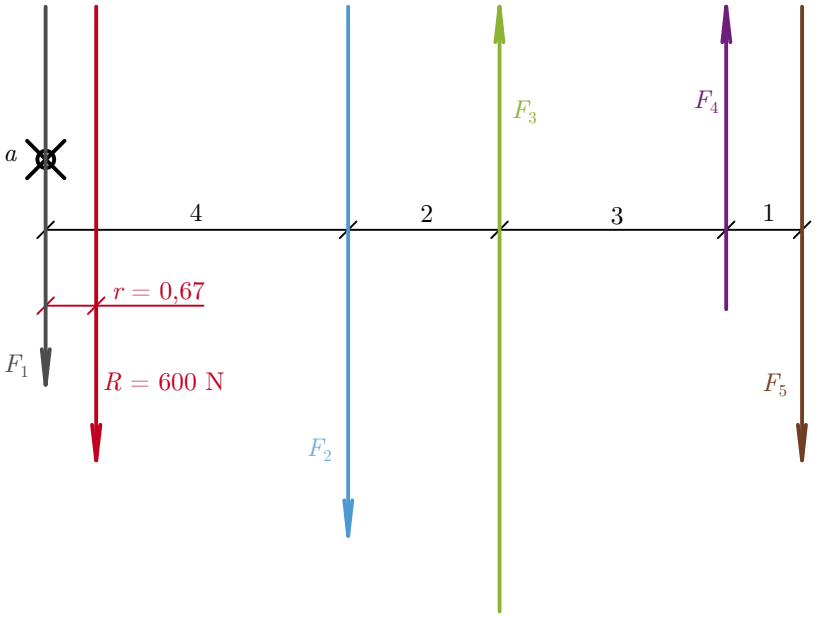


3.2.C

a) početní řešení

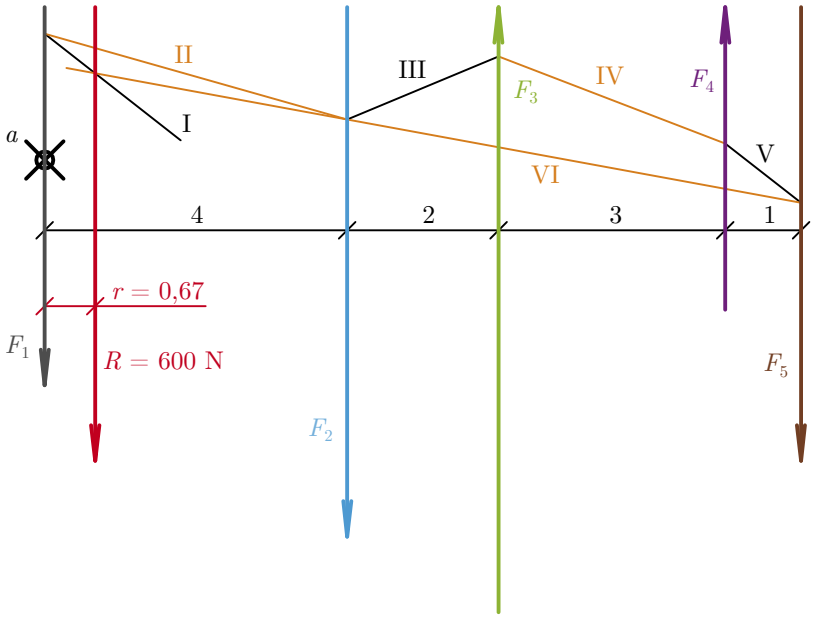
$R = -500 - 700 + 800 + 400 - 600 = -600\,\mathrm{N} \downarrow$

$600r = 700 \cdot 4 - 800 \cdot 6 - 400 \cdot 9 + 600 \cdot 10 \Rightarrow r = 0,\overline{6}\,\mathrm{m} \curvearrowright$

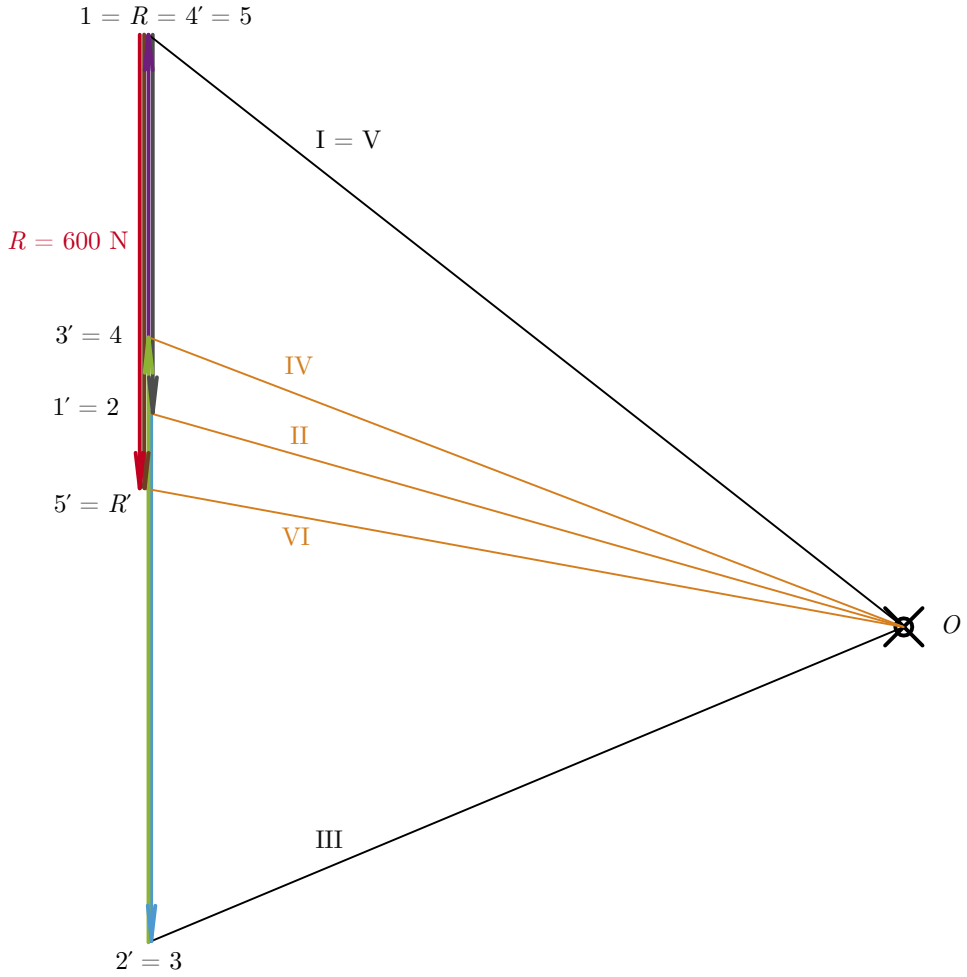


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

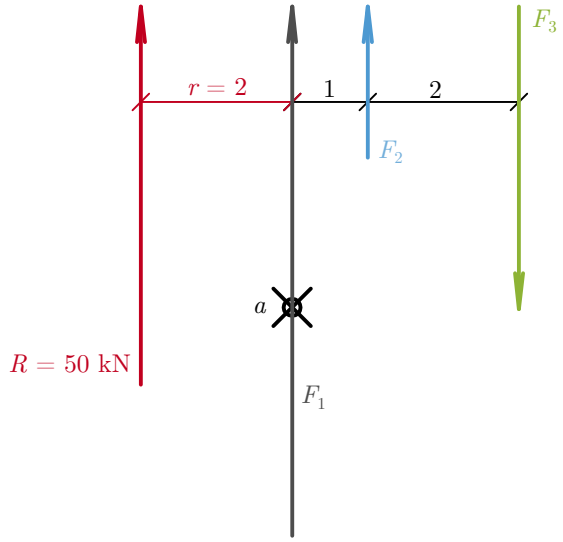


3.2.D

a) početní řešení

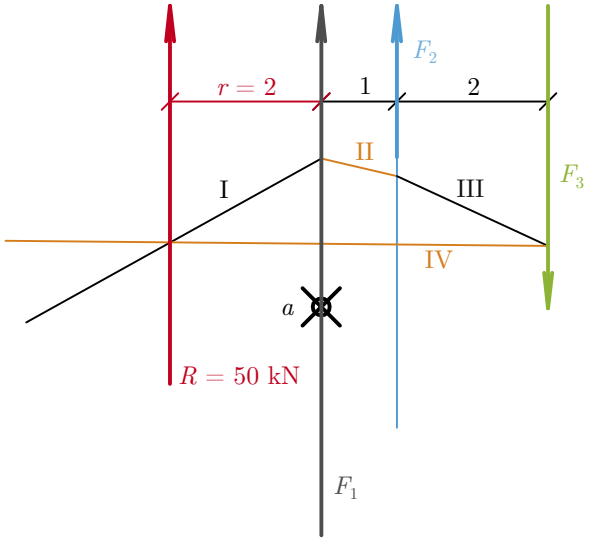
$R = 70 + 20 - 40 = 50\,\mathrm{kN} \uparrow$

$50r = -20 \cdot 1 + 40 \cdot 3 \;\Rightarrow\; r = 2\,\mathrm{m} \curvearrowright$

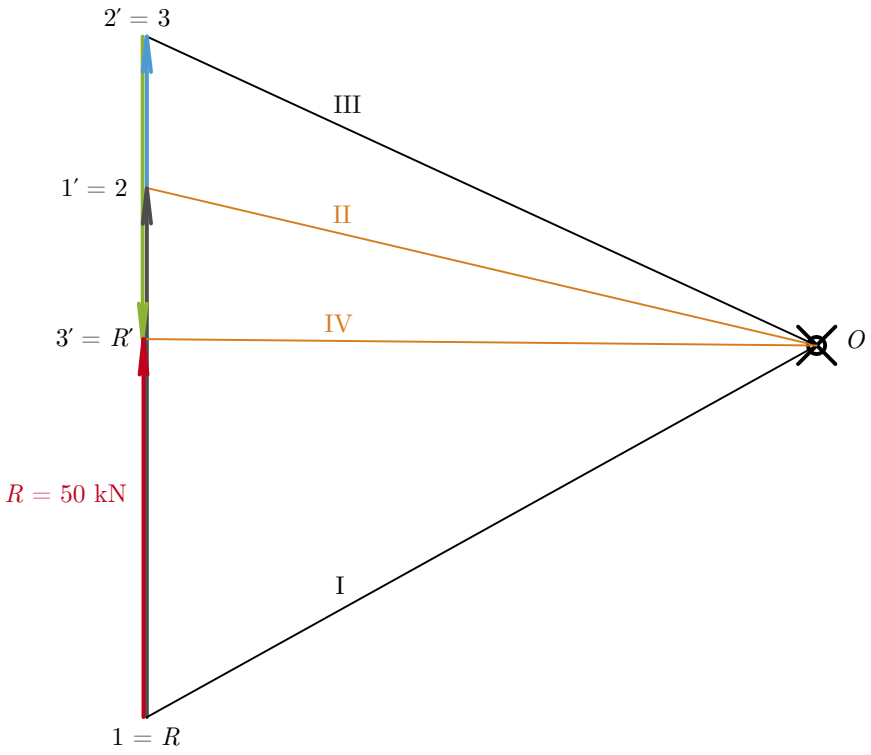


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

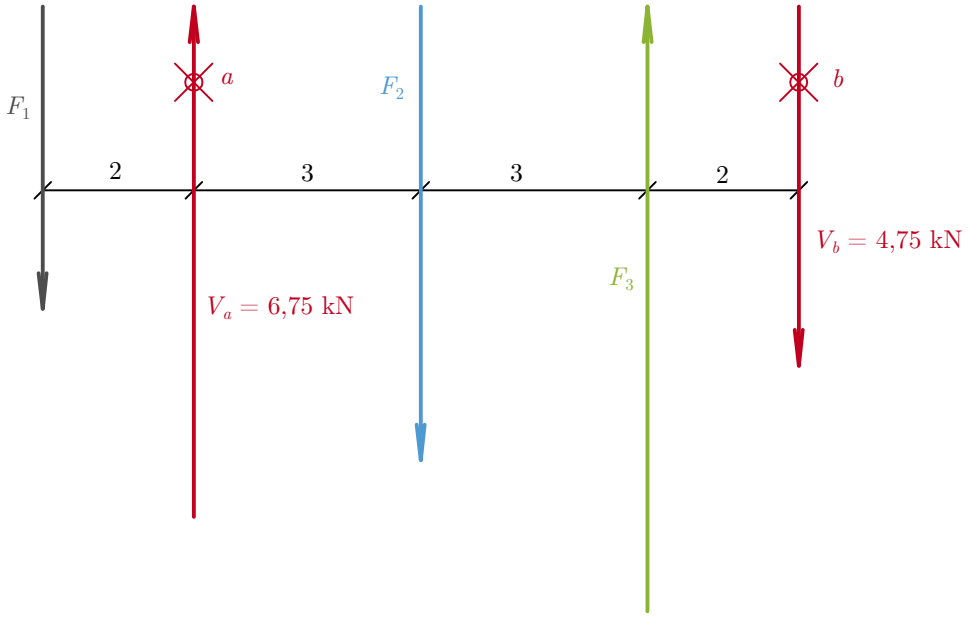


3.3.A

a) početně

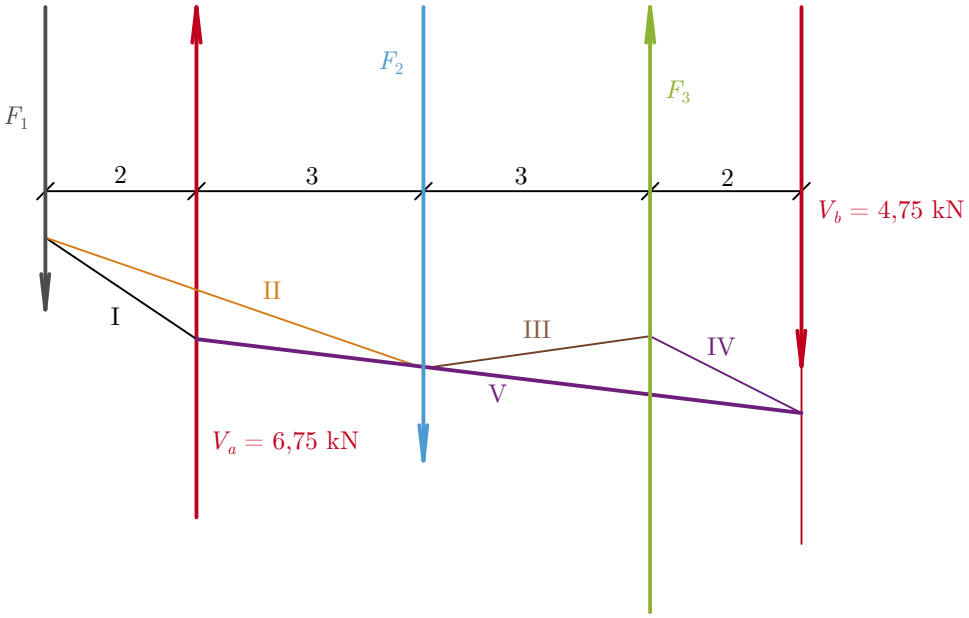
$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ -4 \cdot 10 + V_a \cdot 8 - 6 \cdot 5 + 8 \cdot 2 = 0;\ V_a = 6,75\,\text{kN}\ \curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ -4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 - 8 \cdot 6 + V_b \cdot 8 = 0;\ V_b = 4,75\,\text{kN}\ \curvearrowright$

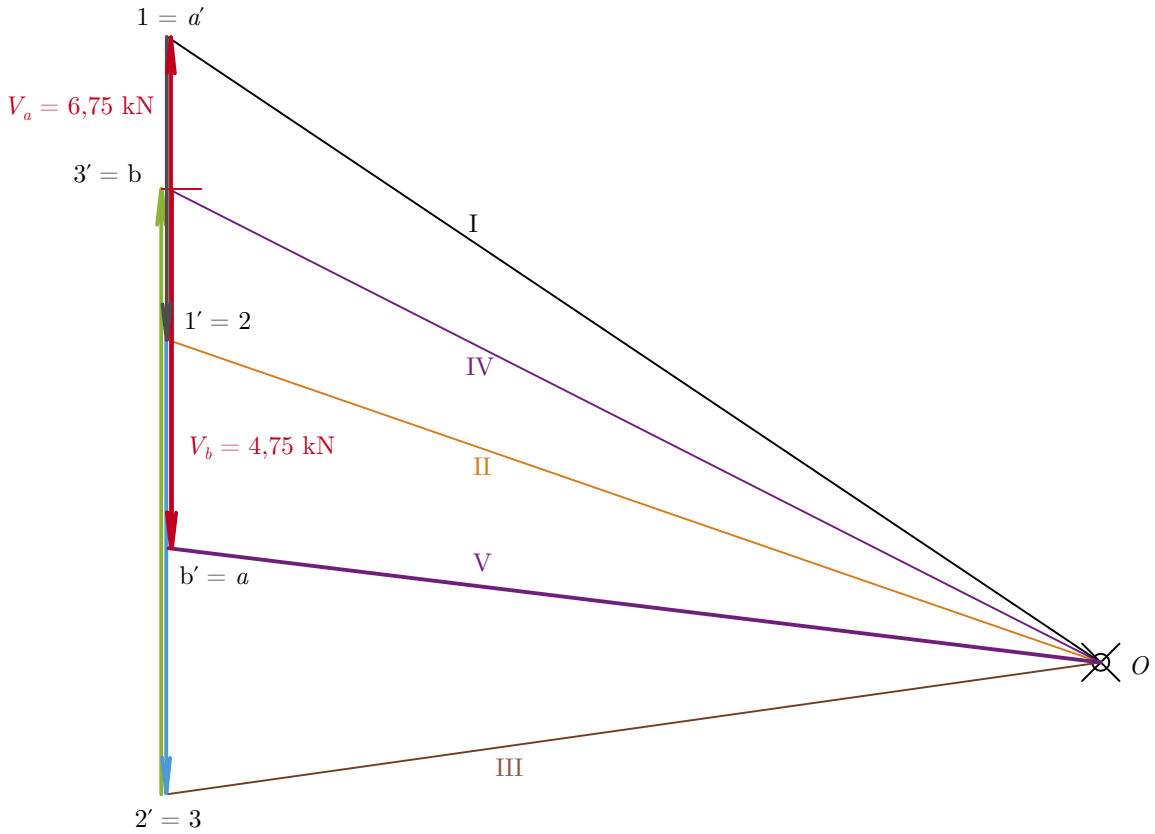


b) graficky

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

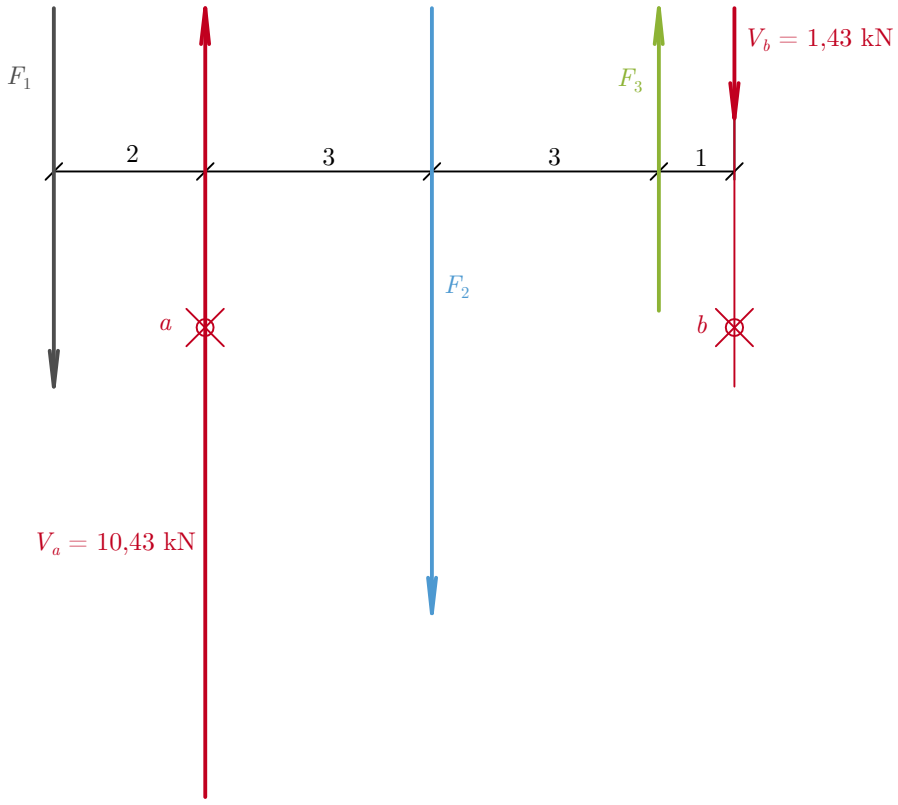


3.3.B

a) početně

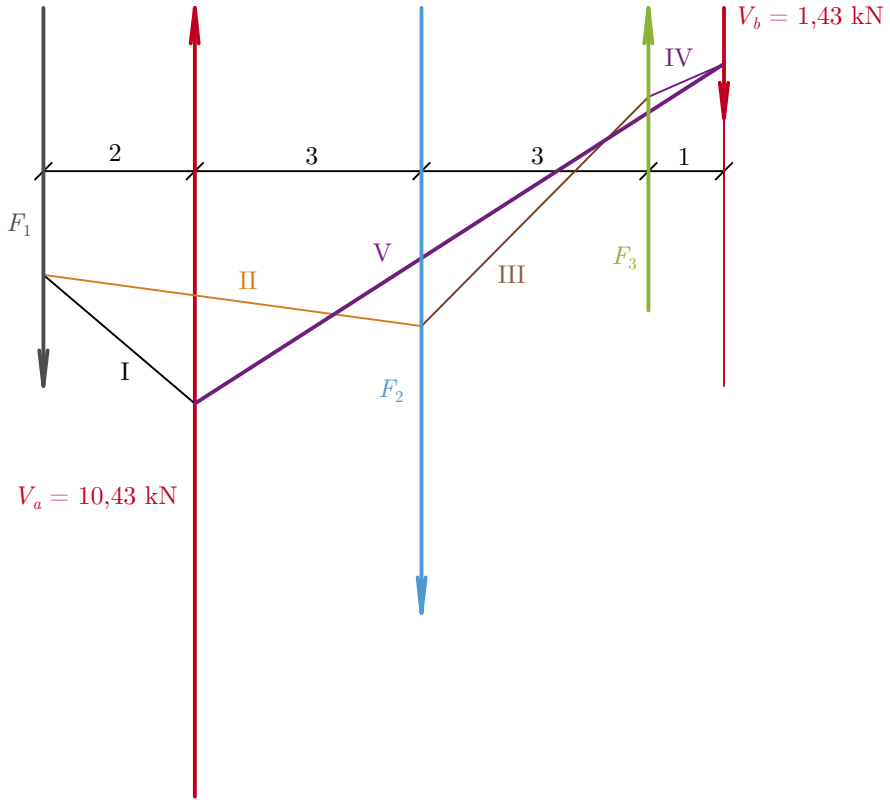
$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ -5 \cdot 9 + V_a \cdot 7 - 8 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 0;\ V_a = 10,43\,\text{kN} \curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ -5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 - 4 \cdot 6 + V_b \cdot 7 = 0;\ V_b = 1,43\,\text{kN} \curvearrowright$

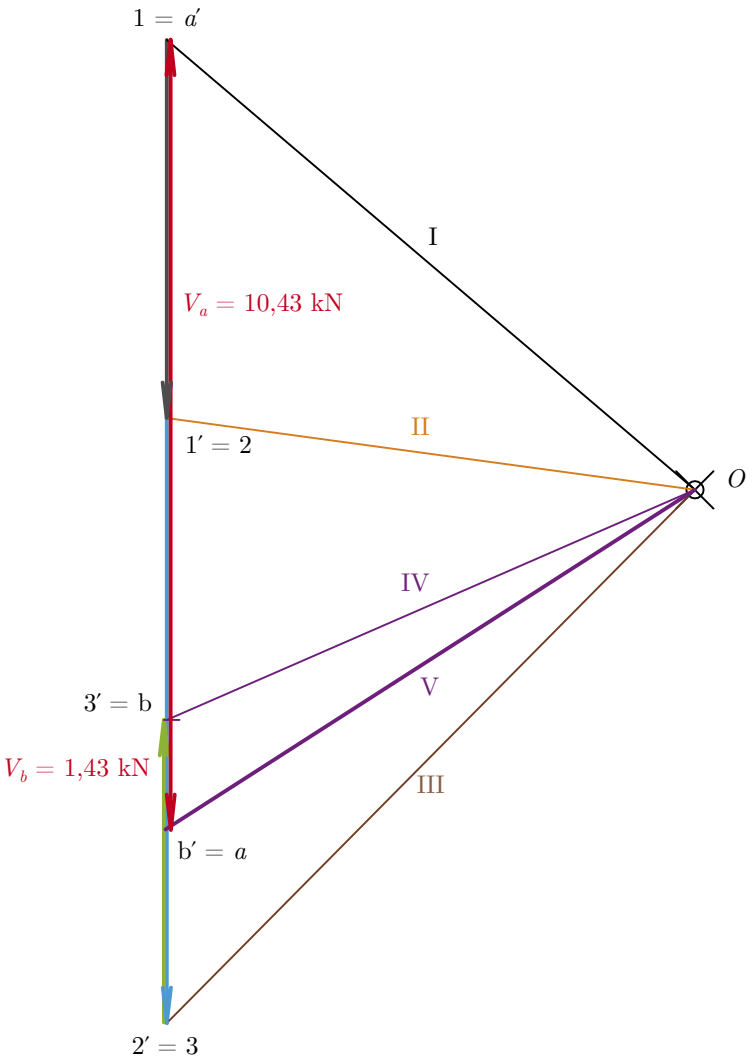


b) graficky

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

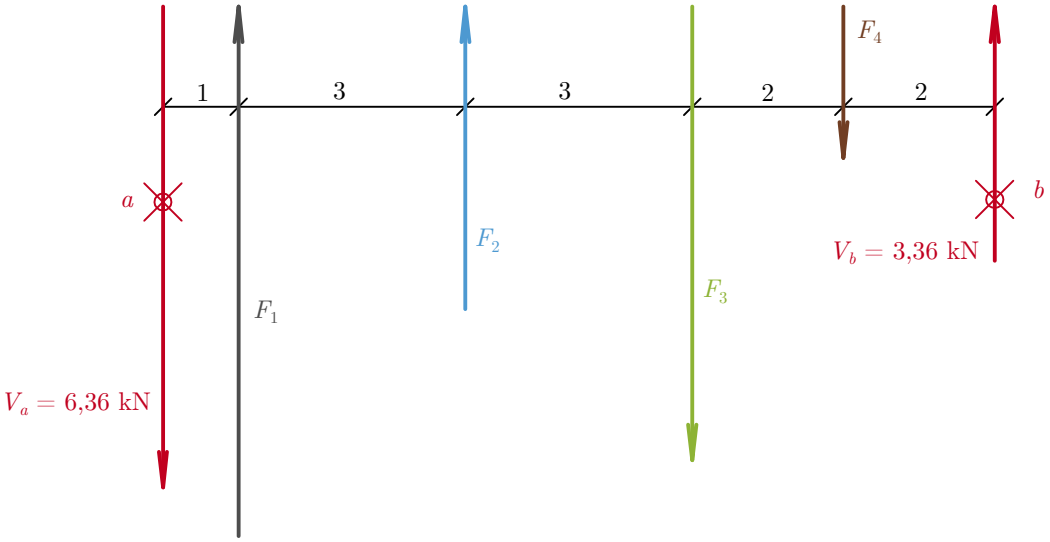


3.3.C

a) početně

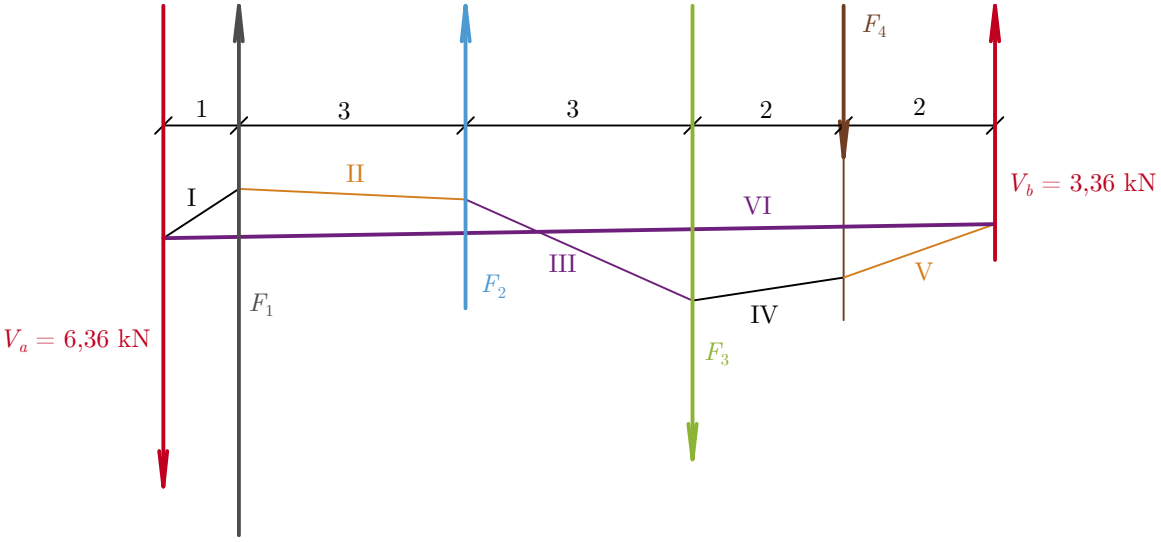
$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ V_a \cdot 11 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 7 - 6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0;\ V_a = -6,36\,\text{kN}\ \curvearrowleft$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ -7 \cdot 1 - 4 \cdot 4 + 6 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + V_b \cdot 11 = 0;\ V_b = -3,36\,\text{kN}\ \curvearrowleft$

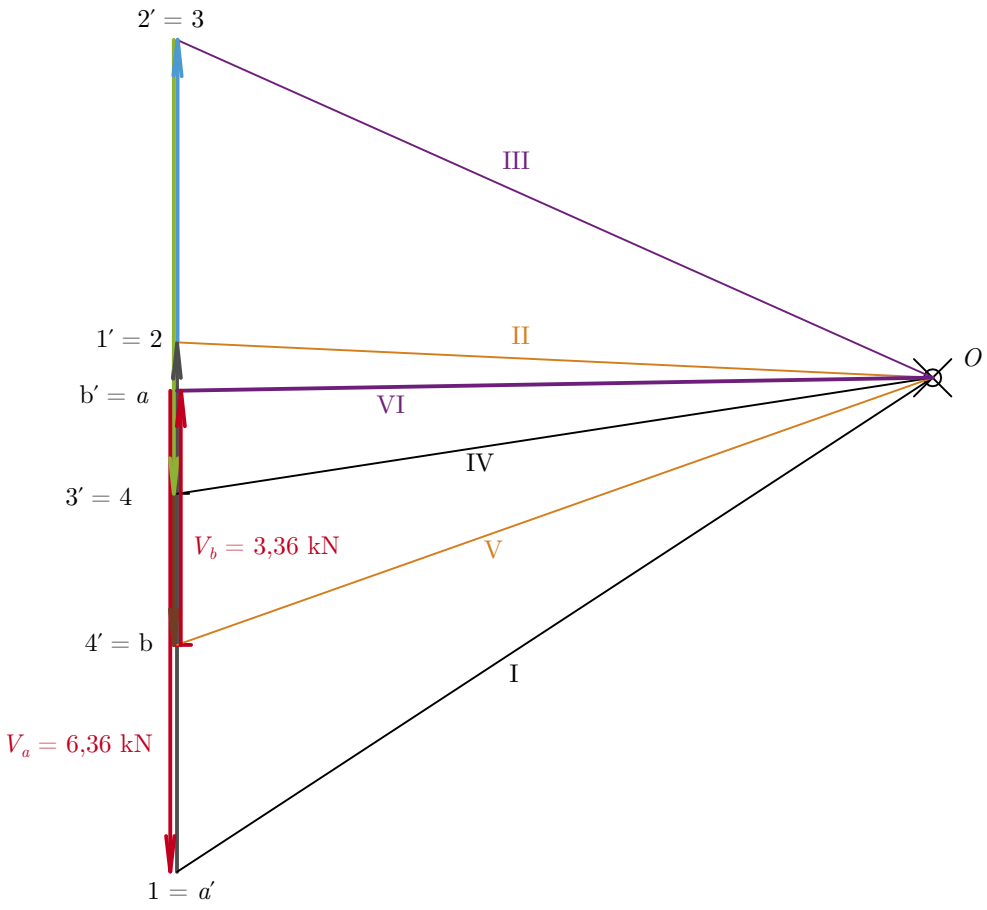


b) graficky

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

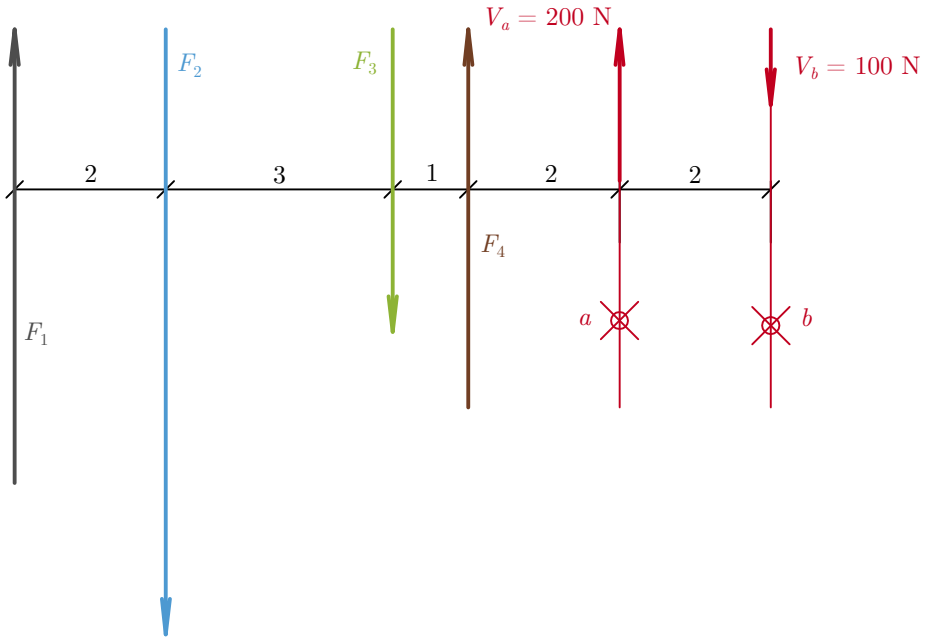


3.3.D

a) početně

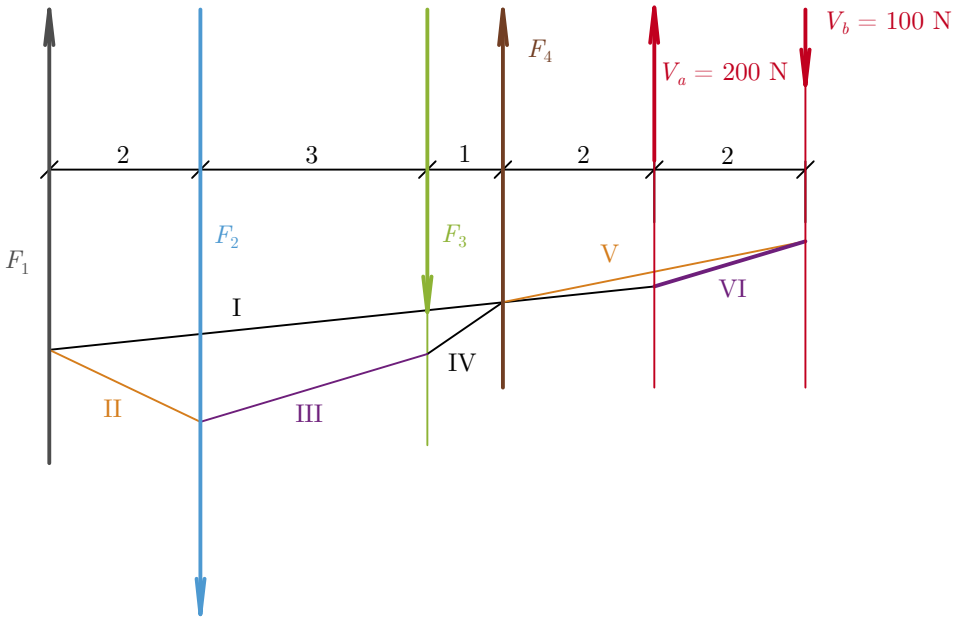
$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ 600 \cdot 10 + -800 \cdot 8 - 400 \cdot 5 + 500 \cdot 4 + V_a \cdot 2 = 0;\ V_a = 200\,\mathrm{N}\curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ 600 \cdot 8 - 800 \cdot 6 - 400 \cdot 3 + 500 \cdot 2 + V_b \cdot 2 = 0;\ V_b = 100\,\mathrm{N}\curvearrowright$

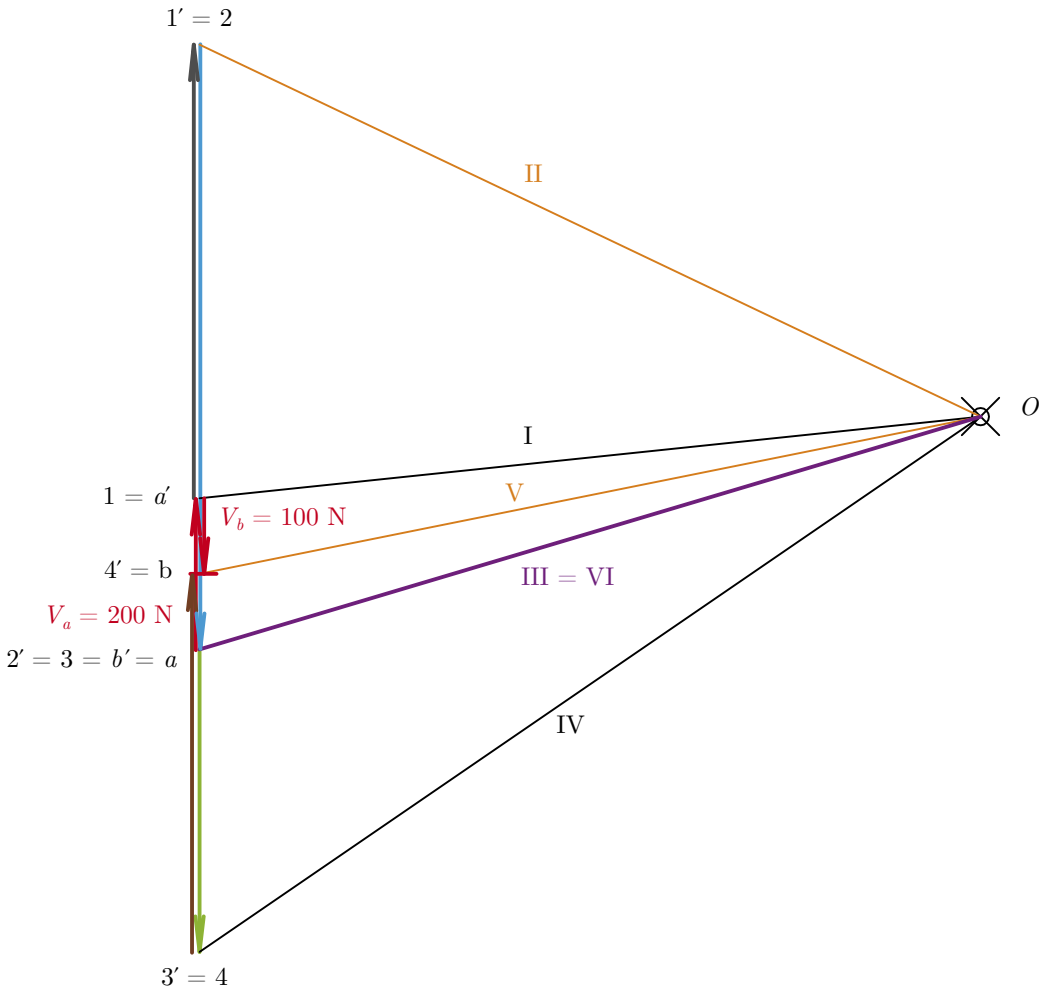


b) graficky

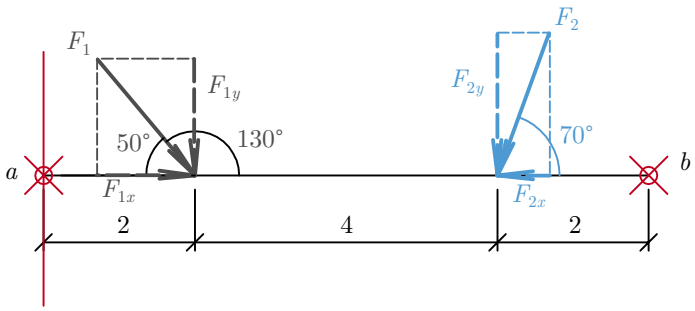
b1) výslednicová čára



b2) složková čára



3.4.A



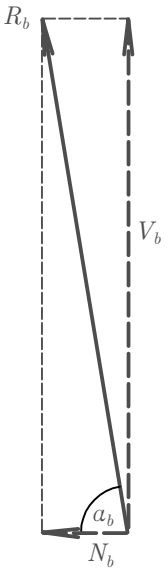
$F_{1x} = 6\cos 50° = 3,857\,\text{kN};\ F_{1y} = 6\sin 50° = 4,596\,\text{kN}$

$F_{2x} = 8\cos 70° = 2,736\,\text{kN};\ F_{2y} = 8\sin 70° = 7,518\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ V_a \cdot 8 - 4,596 \cdot 6 - 7,518 \cdot 2 = 0;\ V_a = 5,327\,\text{kN} \curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 5,327 - 4,596 - 7,518 + V_b = 0;\ V_b = 6,787\,\text{kN} \uparrow$

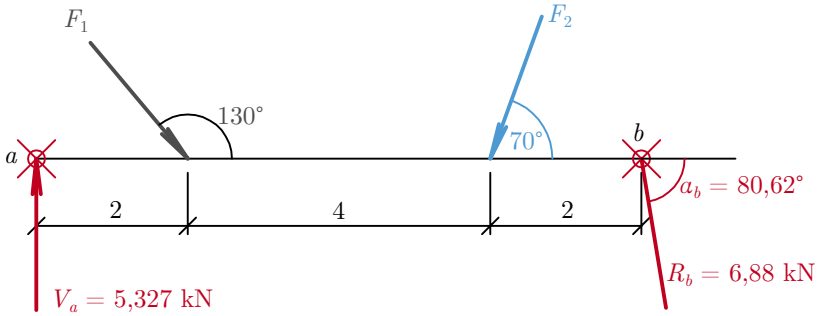
$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ 3,587 - 2,736 + N_b = 0;\ N_b = -1,121\,\text{kN} \leftarrow$



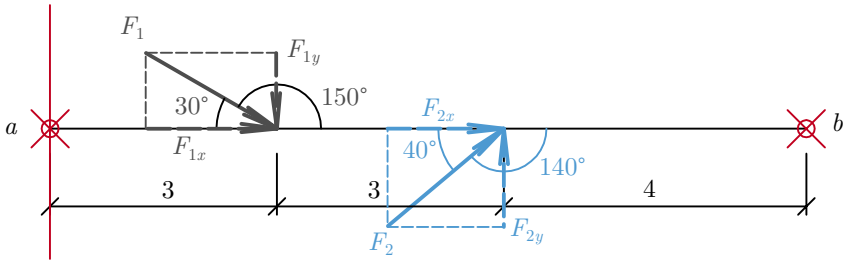
$R_b = \sqrt{6,787^2 + (-1,121)^2} = 6,88\,\text{kN}$

$\tan \alpha_b = \frac{6,787}{-1,121} = -6,0544;\ \alpha_b = -80,62°$

Zakreslení výsledků



3.4.B



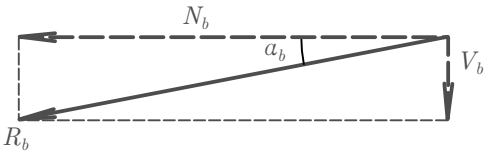
$F_{1x} = 6\cos 30° = 5,196\,\text{kN};\ F_{1y} = 6\sin 30° = 3\,\text{kN}$

$F_{2x} = 8\cos 40° = 6,128\,\text{kN};\ F_{2y} = 8\sin 40° = 5,142\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ V_a \cdot 10 - 3 \cdot 7 + 5,142 \cdot 4 = 0;\ V_a = 0,043\,\text{kN}\ \curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 0,043 - 3 + 5,142 + V_b = 0;\ V_b = -2,185\,\text{kN}\ \downarrow$

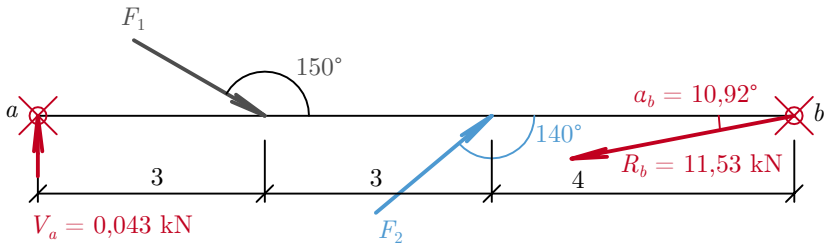
$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ 5,196 + 6,128 + N_b = 0;\ N_b = -11,324\,\text{kN}\ \leftarrow$



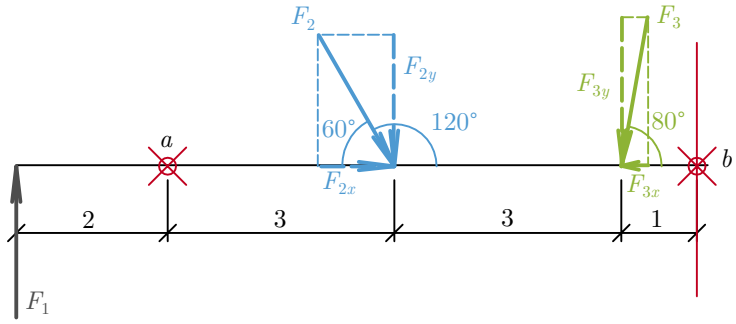
$R_b = \sqrt{(-2,185)^2 + (-11,324)^2} = 11,53\,\text{kN}$

$\tan \alpha_b = \frac{-2,185}{-11,324} = 0,193;\ \alpha_b = 10,92°$

Zakreslení výsledků



3.4.C



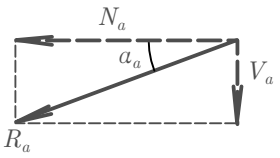
$F_{2x} = 5\cos 60° = 2,5\,\text{kN};\ F_{2y} = 5\sin 60° = 4,33\,\text{kN}$

$F_{3x} = 6\cos 80° = 1,042\,\text{kN};\ F_{3y} = 6\sin 80° = 5,909\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ 3 \cdot 2 + 4,33 \cdot 3 + 5,909 \cdot 6 + V_b \cdot 7 = 0;\ V_b = -7,78\,\text{kN}\ \curvearrowleft$

$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 3 + V_a - 4,33 - 5,909 + 7,78 = 0;\ V_a = -0,541\,\text{kN}\ \downarrow$

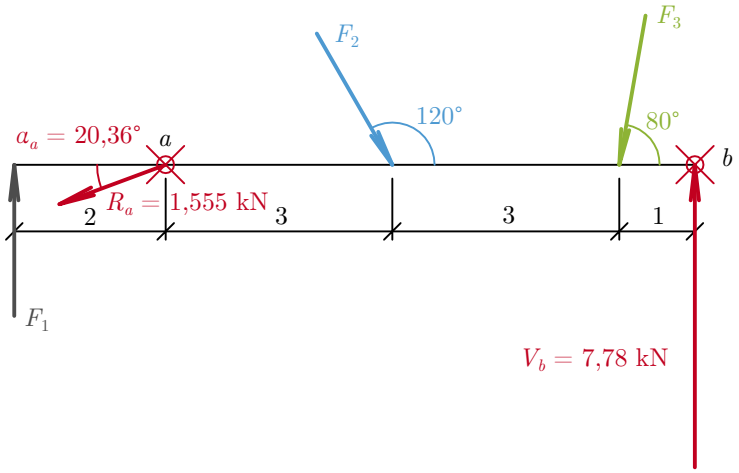
$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_a + 2,5 - 1,042 = 0;\ N_a = -1,458\,\text{kN}\ \leftarrow$



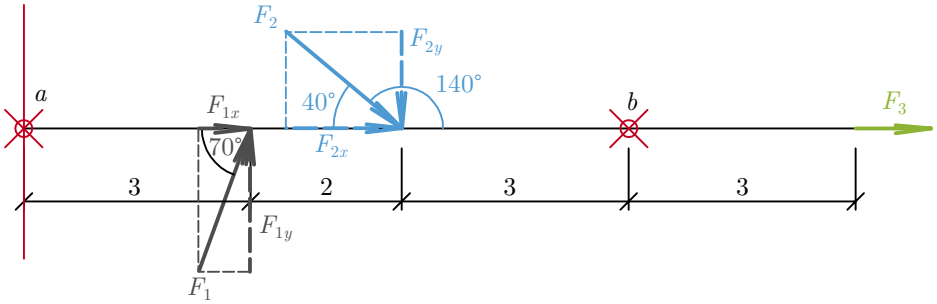
$R_a = \sqrt{(-0,541)^2 + (-1,458)^2} = 1,555\,\text{kN}$

$\tan \alpha_a = \frac{-0,541}{-1,458} = 0,371;\ \alpha_a = 20,36°$

Zakreslení výsledků



3.4.D



$F_{1x} = 4\cos 70° = 1,368\,\text{kN};\ F_{1y} = 4\sin 70° = 3,759\,\text{kN}$

$F_{2x} = 3\cos 40° = 2,298\,\text{kN};\ F_{2y} = 3\sin 40° = 1,928\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ V_a \cdot 8 + 3,759 \cdot 5 - 1,928 \cdot 3 = 0;\ V_a = -1,626\,\text{kN}\ \curvearrowleft$

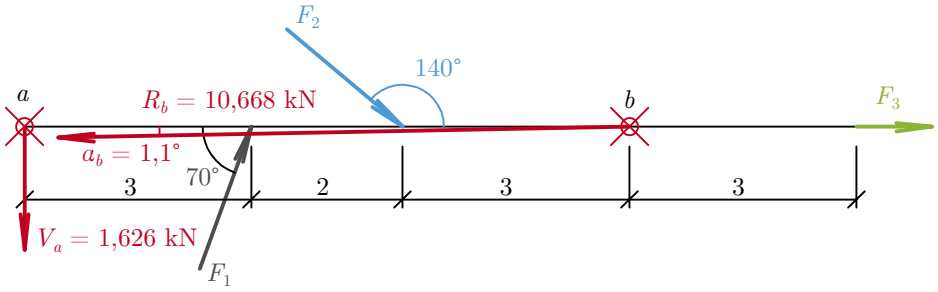
$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ -1,626 + 3,759 - 1,928 + V_b = 0;\ V_b = -0,205\,\text{kN}\ \downarrow$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ 1,368 + 2,298 + N_b + F = 0;\ N_b = -10,666\,\text{kN}\ \downarrow$

$R_b = \sqrt{(-0,205)^2 + (-10,666)^2} = 10,668\,\text{kN}$

$\tan \alpha_b = \frac{-0,205}{-10,666} = 0,0192;\ \alpha_b = 1,1°$

Zakreslení výsledků

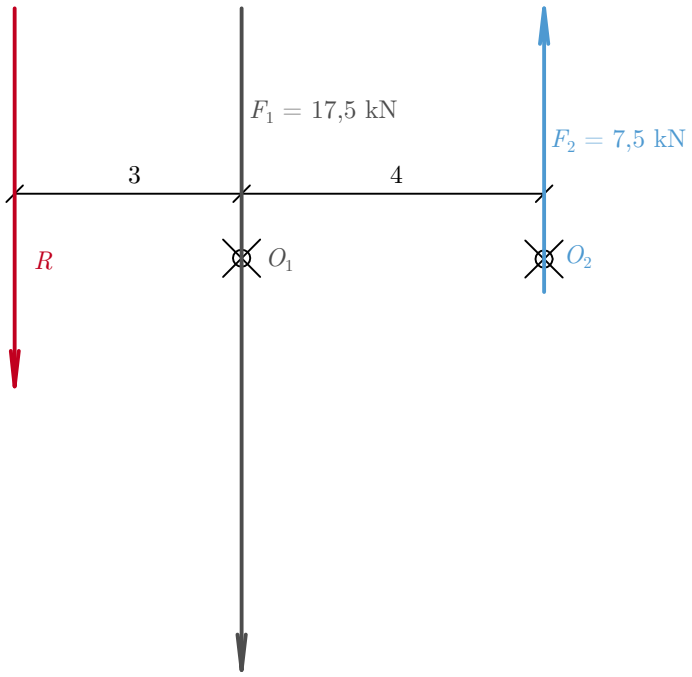


3.5.A

a) početní řešení

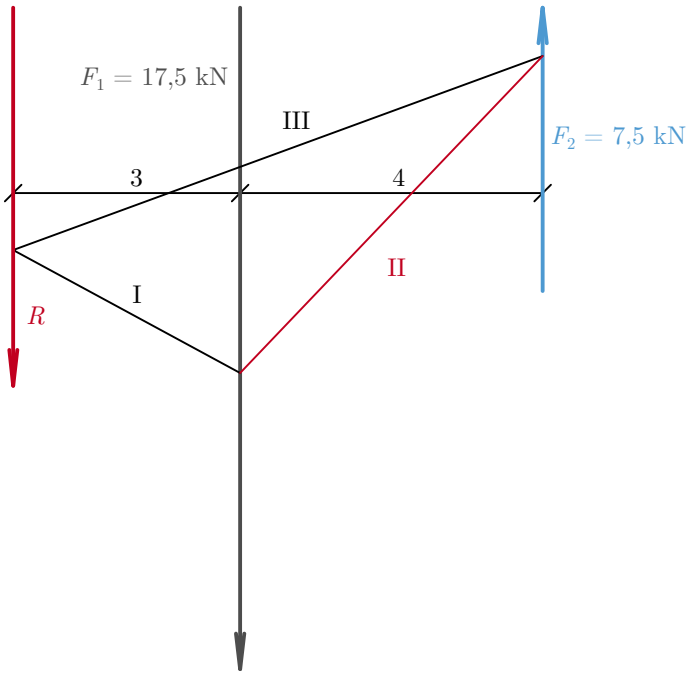
$F_2 \cdot 4 = -10 \cdot 3;\ F_2 = -7,5\,\text{kN}\ \curvearrowleft$

$F_1 \cdot 4 = -10 \cdot 7;\ F_1 = -17,5\,\text{kN}\ \curvearrowleft$

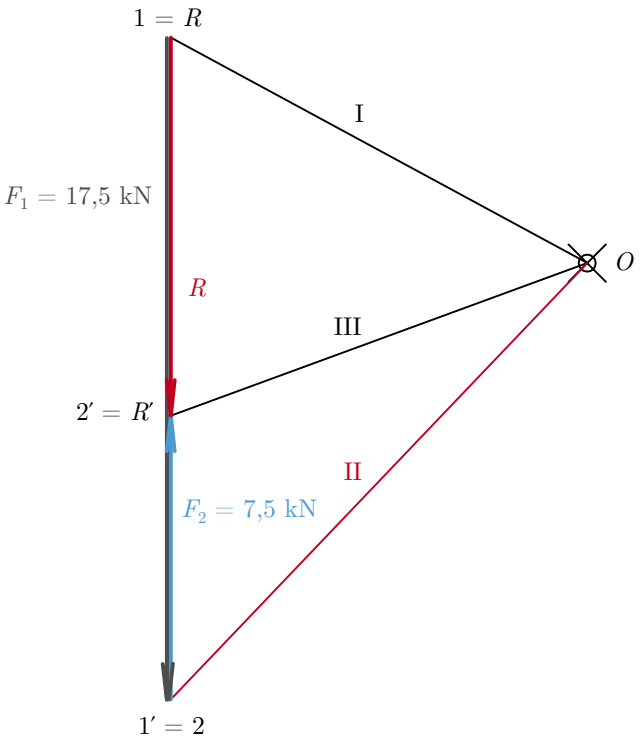


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

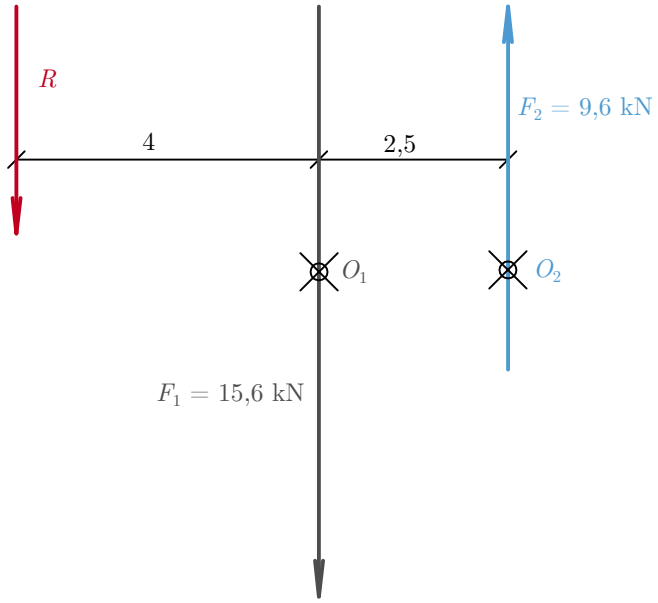


3.5.B

a) početní řešení

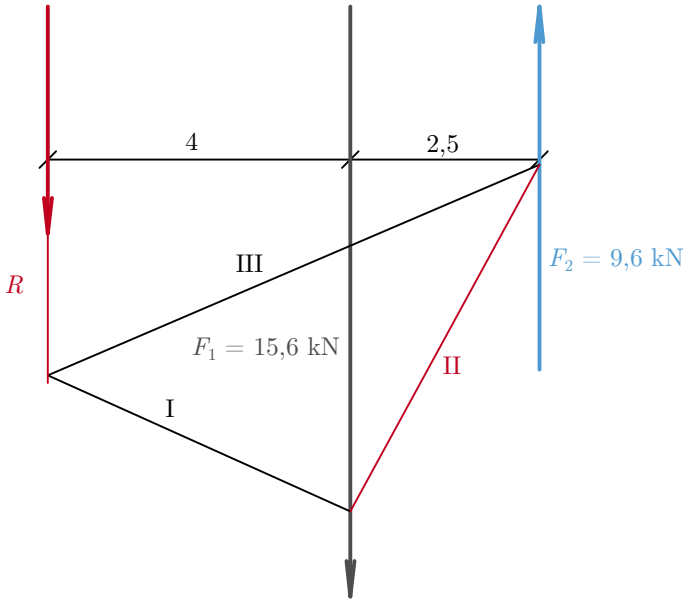
$F_2 \cdot 2,5 = -6 \cdot 4;\ F_2 = -9,6\,\text{kN}\ \curvearrowleft$

$F_1 \cdot 2,5 = -6 \cdot 6,5;\ F_1 = -15,6\,\text{kN}\ \curvearrowleft$

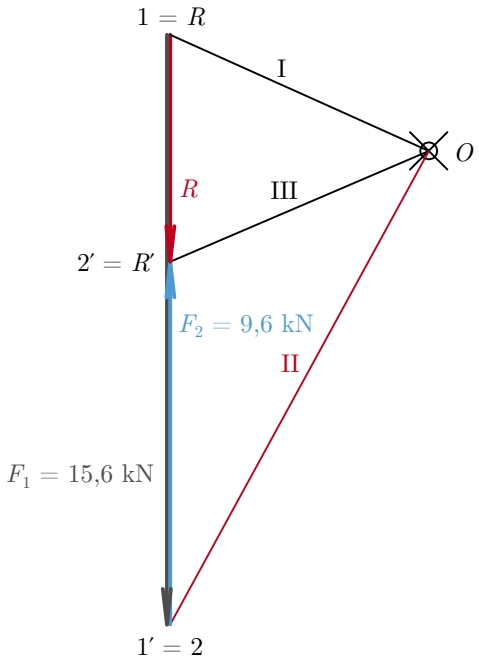


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

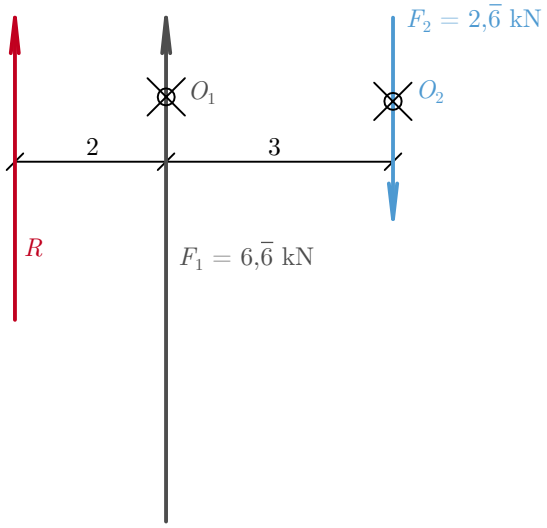


3.5.C

a) početní řešení

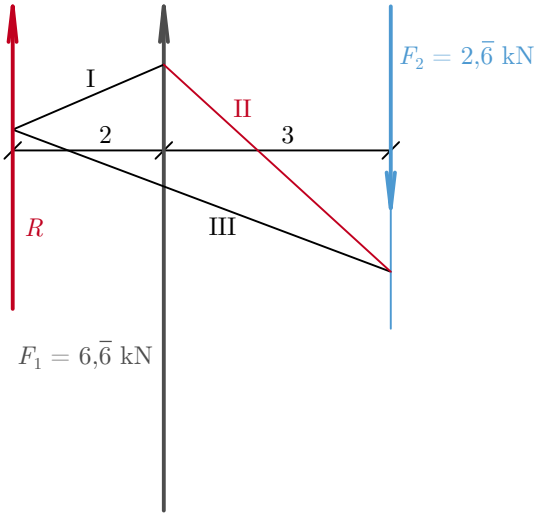
$F_2 \cdot 3 = 4 \cdot 2;\ F_2 = 2,\overline{6}\,\text{kN}\ \curvearrowright$

$F_1 \cdot 3 = 4 \cdot 5;\ F_1 = 6,\overline{6}\,\text{kN}\ \curvearrowright$

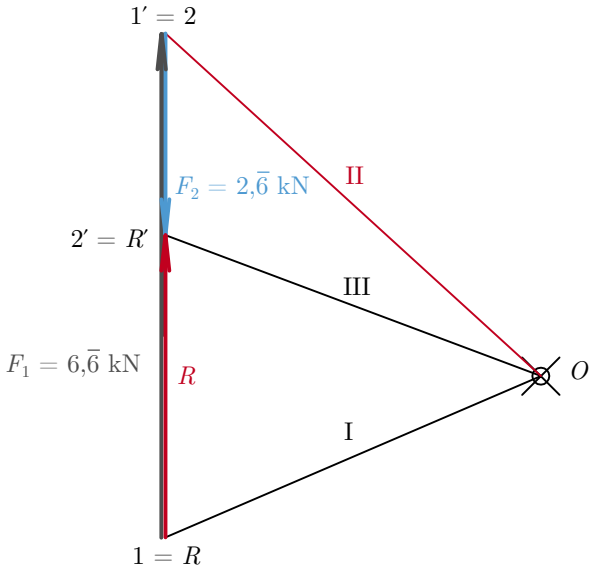


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára

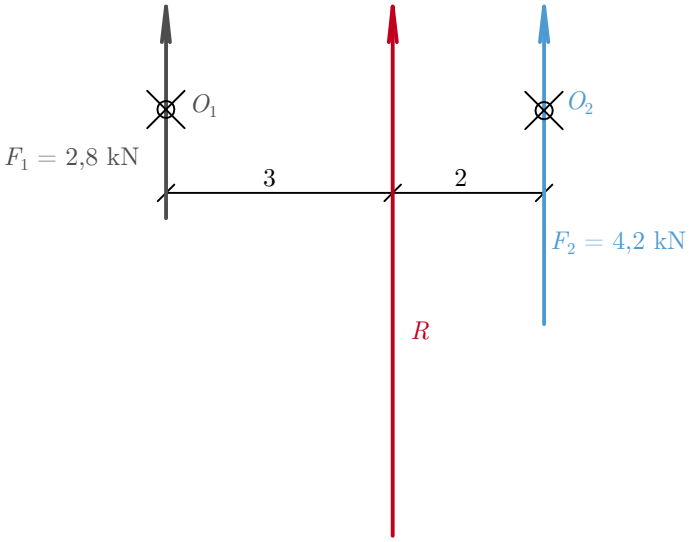


3.5.D

a) početní řešení

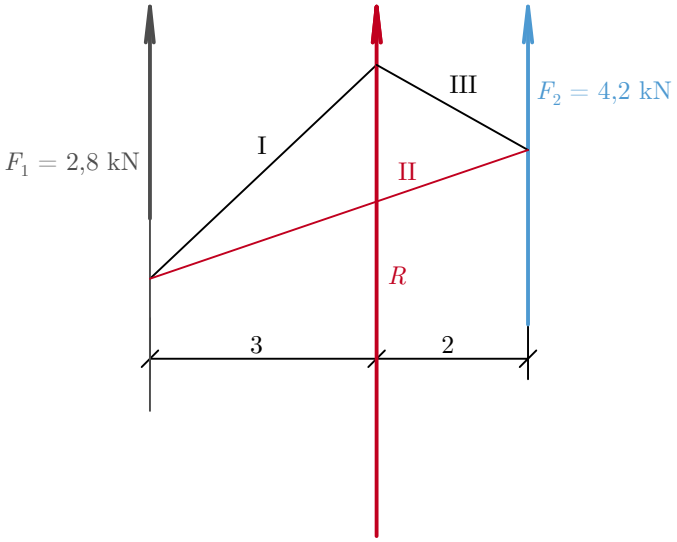
$F_2 \cdot 5 = -7 \cdot 3;\ F_2 = -4,2\,\text{kN}\ \curvearrowleft$

$F_1 \cdot 5 = 7 \cdot 2;\ F_1 = 2,8\,\text{kN}\ \curvearrowright$

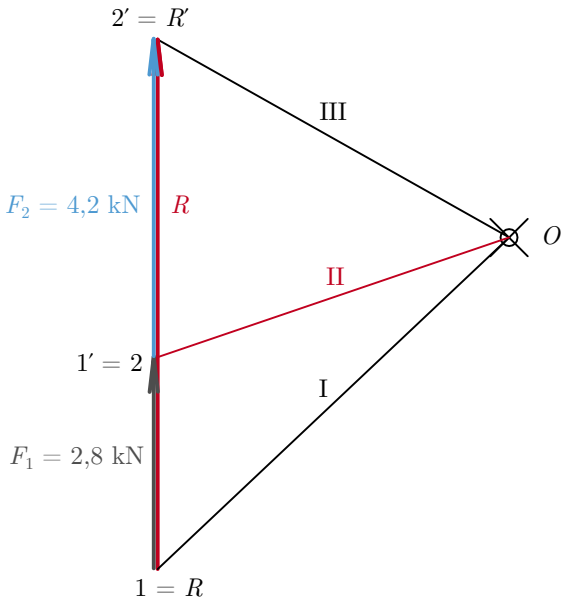


b) grafické řešení

b1) výslednicová čára



b2) složková čára



4.A

č.	A [cm^2]	y [cm]	z [cm]	I_y [cm^4]	I_z [cm^4]	dy [cm]	dz [cm]
1.	$30^2=$ 900	15	15	$\frac{1}{12}\cdot 30^4=$ 67 500	$\frac{1}{12}\cdot 30^4=$ 67 500	$23,\overline{3}-15=$ $8,\overline{3}$	0
2.	$\frac{1}{2}\cdot 30^2=$ 450	40	15	$\frac{1}{48}\cdot 30^4=$ 16 875	$\frac{1}{36}\cdot 30^4=$ 22 500	$23,\overline{3}-40=$ $-16,\overline{6}$	0
$\sum$	1 350			84 375	90 000		

$y_t = \frac{900\cdot 15+450\cdot 40}{1350} = 23,\overline{3}\,\text{cm}$

$z_t = \frac{900\cdot 15+450\cdot 15}{1350} = 15\,\text{cm}$; nebylo nutné počítat, ze zadání je zřejmé, že se jedná o symetrický průřez

Zakreslení do zadání.

$I_y = 84\,375 + 900\cdot 0^2 + 450\cdot 0^2 = 84\,375\,\text{cm}^4$

$W_{yh} = W_{yd} = \frac{84\,375}{15} = 5\,625\,\text{cm}^3$

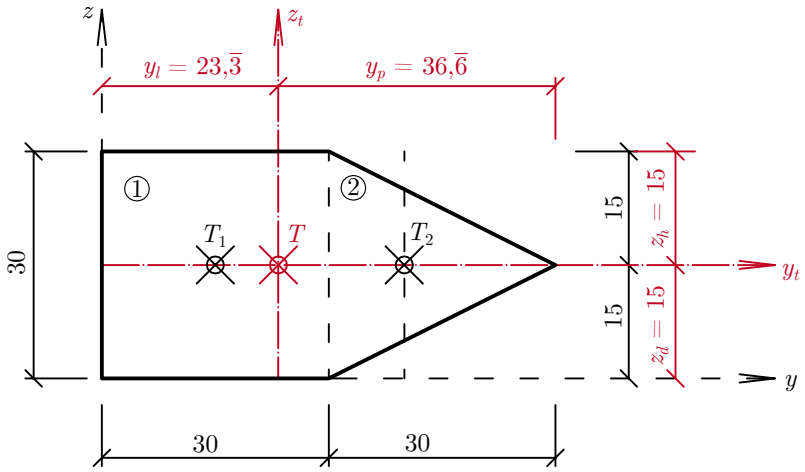
$i_y = \sqrt{\frac{84\,375}{1\,350}} = 7,91\,\text{cm}$

$I_z = 90\,000 + 900\cdot 8,\overline{3}^2 + 450\cdot 16,\overline{6}^2 = 277\,500\,\text{cm}^4$

$W_{zl} = \frac{277\,500}{23,\overline{3}} = 11\,892,86\,\text{cm}^3$

$W_{zp} = \frac{277\,500}{36,\overline{6}} = 7\,568,18\,\text{cm}^3$

$i_z = \sqrt{\frac{277\,500}{1\,350}} = 14,34\,\text{cm}$



4.B

č.	$A\ [\mathrm{mm}^2]$	$y\ [\mathrm{mm}]$	$z\ [\mathrm{mm}]$	$I_y\ [\mathrm{mm}^4]$	$I_z\ [\mathrm{mm}^4]$	$dy\ [\mathrm{mm}]$	$dz\ [\mathrm{mm}]$
1.	$70{\cdot}30=$ $2\,100$	35	15	$\frac{1}{12}{\cdot}70{\cdot}30^3=$ $157\,500$	$\frac{1}{12}{\cdot}70^3{\cdot}30=$ $857\,500$	$36{,}41-35=$ $1,41$	$14{,}72-15=$ $0,28$
2.	$-\frac{1}{2}{\cdot}30{\cdot}12=$ -180	20	18	$-\frac{1}{36}{\cdot}30{\cdot}12^3=$ $-1\,440$	$-\frac{1}{36}{\cdot}30^3{\cdot}12=$ $-9\,000$	$36{,}41-20=$ $16,41$	$14{,}72-18=$ $3,28$
$\sum$	$1\,920$			$156\,060$	$848\,500$		

$y_t = \frac{2\,100{\cdot}35-180{\cdot}20}{1\,920} = 36,41\,\mathrm{mm}$

$z_t = \frac{2\,100{\cdot}15-180{\cdot}18}{1\,920} = 14,72\,\mathrm{mm}$

Zakreslení do zadání.

$I_y = 156\,060 + 2\,100 \cdot 0,28^2 - 180 \cdot 3,28^2 = 154\,288,13\,\mathrm{mm}^4$

$W_{yd} = \frac{154\,288,13}{14,72} = 10\,481,53\,\mathrm{mm}^3$

$W_{yh} = \frac{154\,288,13}{15,28} = 10\,097,39\,\mathrm{mm}^3$

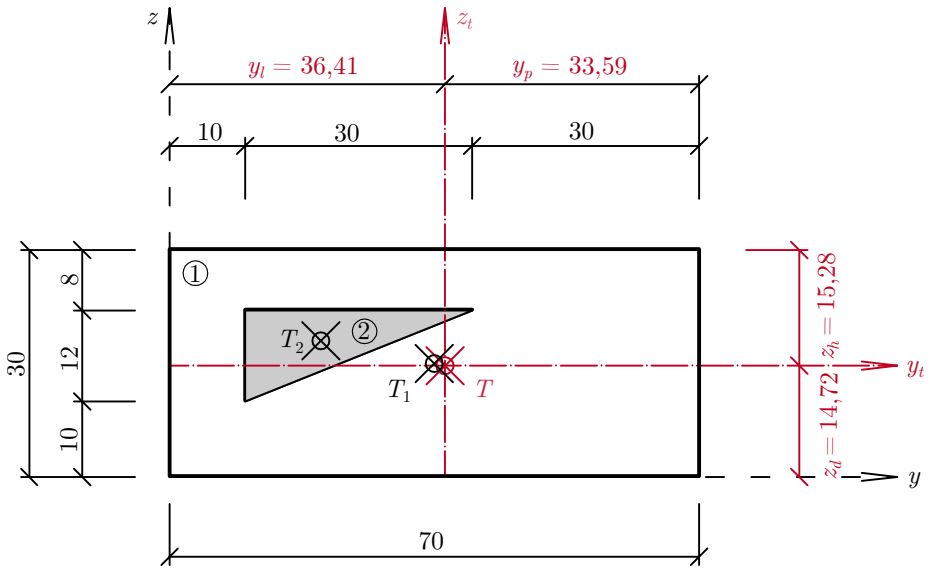
$i_y = \sqrt{\frac{154\,288,13}{1\,920}} = 8,96\,\mathrm{mm}$

$I_z = 848\,500 + 2\,100 \cdot 1,41^2 - 180 \cdot 16,41^2 = 804\,203,15\,\mathrm{mm}^4$

$W_{zl} = \frac{804\,203,15}{36,41} = 22\,087,43\,\mathrm{mm}^3$

$W_{zp} = \frac{804\,203,15}{33,59} = 23\,941,74\,\mathrm{mm}^3$

$i_z = \sqrt{\frac{804\,203,15}{1\,920}} = 20,47\,\mathrm{mm}$



4.C

č.	$A\ [\mathrm{mm}^2]$	y [mm]	z [mm]	$I_y\ [\mathrm{mm}^4]$	$I_z\ [\mathrm{mm}^4]$	dy [mm]	dz [mm]
1.	$20{\cdot}10=$ 200	-10	46	$\frac{1}{12}{\cdot}20{\cdot}10^3=$ $1\,666,\overline{6}$	$\frac{1}{12}{\cdot}20^3{\cdot}10=$ $6\,666,\overline{6}$	$39{,}65-(-10)=$ $49,65$	$23{,}27-46=$ $-22,73$
2.	$90{\cdot}51=$ 4590	45	25,5	$\frac{1}{12}{\cdot}90{\cdot}51^3=$ $994\,882,5$	$\frac{1}{12}{\cdot}90^3{\cdot}51=$ $3\,098\,250$	$39{,}65-45=$ $5,35$	$23{,}27-25{,}5=$ $-2,23$
3.	$\frac{1}{2}{\cdot}33{\cdot}21=$ $346,5$	-11	14	$\frac{1}{36}{\cdot}33{\cdot}21^3=$ $8\,489,25$	$\frac{1}{36}{\cdot}33^3{\cdot}21=$ $20\,963,25$	$39{,}65-(-11)=$ $50,65$	$23{,}27-14=$ $9,27$
4.	$\frac{1}{2}{\cdot}44{\cdot}18=$ 396	47	-6	$\frac{1}{36}{\cdot}44{\cdot}18^3=$ $7\,128$	$\frac{1}{48}{\cdot}44^3{\cdot}18=$ $31\,944$	$39{,}65-47=$ $-7,35$	$23{,}27-(-6)=$ $29,27$
$\sum$	$5\,532,5$			$1\,012\,166,4$	$3\,157\,823,9$		

$$y_t = \frac{200{\cdot}(-10)+4\,590{\cdot}45+346{,}5{\cdot}(-11)+396{\cdot}47}{5\,532{,}5} = 39,65\,\mathrm{mm}$$

$$z_t = \frac{200{\cdot}46+4590{\cdot}25{,}5+346{,}5{\cdot}14+396{\cdot}(-6)}{5\,532{,}5} = 23,27\,\mathrm{mm}$$

$$I_y = 1\,012\,166,4+200{\cdot}22,73^2+4\,590{\cdot}2,23^2+346,5{\cdot}9,27^2+396{\cdot}29,27^2 = 1\,507\,364,6\,\mathrm{mm}^4$$

$$W_{yd} = \frac{1\,507\,364{,}6}{41{,}27} = 36\,524,462\,\mathrm{mm}^3$$

$$W_{yh} = \frac{1\,507\,364{,}6}{27{,}73} = 54\,358,621\,\mathrm{mm}^3$$

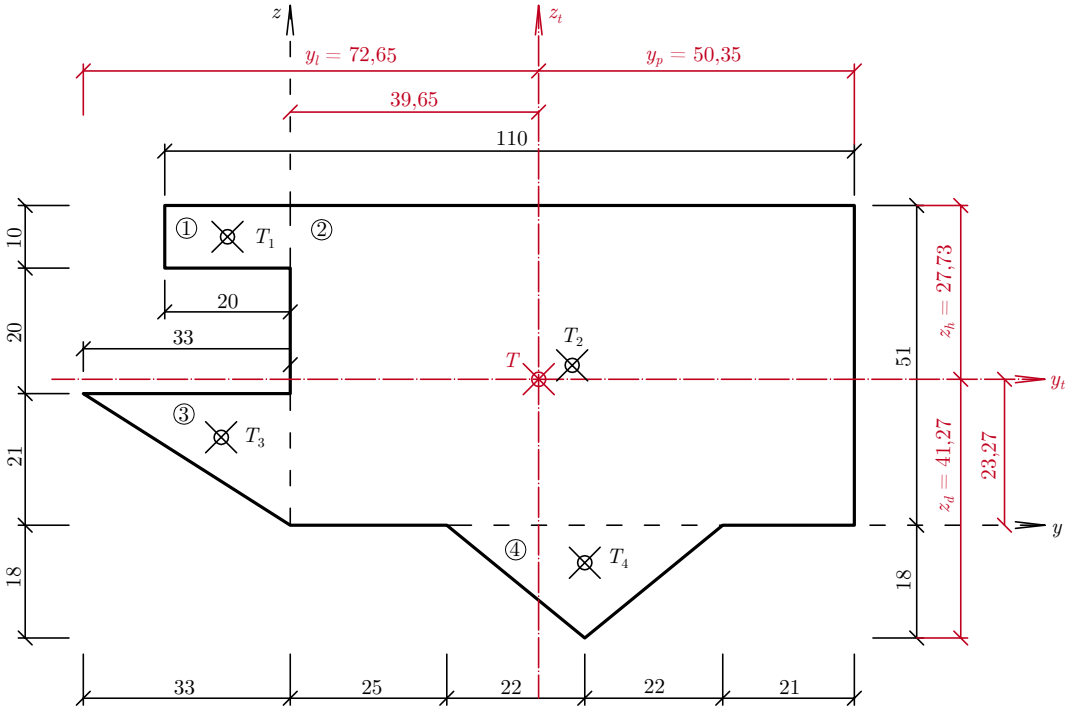
$$i_y = \sqrt{\frac{1\,507\,364{,}6}{5\,532{,}5}} = 16,51\,\mathrm{mm}$$

$$I_z = 3\,157\,823,9+200{\cdot}49,65^2+4\,590{\cdot}5,35^2+346,5{\cdot}50,65^2+396{\cdot}7,35^2 = 4\,692\,537,5\,\mathrm{mm}^4$$

$$W_{zl} = \frac{4\,692\,537{,}5}{72{,}65} = 64\,591,02\,\mathrm{mm}^3$$

$$W_{zp} = \frac{4\,692\,537{,}5}{50{,}35} = 93\,198,36\,\mathrm{mm}^3$$

$$i_z = \sqrt{\frac{4\,692\,537{,}5}{5532{,}5}} = 29,12\,\mathrm{mm}$$



4.D

č.	A [mm^2]	y [mm]	z [mm]	I_y [mm^4]	I_z [mm^4]	dy [mm]	dz [mm]
1.	2 210	45, 8	21, 1	$1\,441 \cdot 10^3$	$4\,409 \cdot 10^3$	$94{,}54-45{,}8=$ $48, 74$	$-7{,}47-21{,}1=$ $-28, 57$
2.	4 230	120	$-22, 4$	$2\,470 \cdot 10^3$	$36 \cdot 10^6$	$94{,}54-120=$ $-25, 46$	$-7{,}47-(-22{,}4)=$ $14, 93$
$\sum$	6 440			$3\,911 \cdot 10^3$	$40\,409 \cdot 10^3$		

$y_t = \frac{2\,210 \cdot 45{,}8 + 4\,230 \cdot 120}{6\,440} = 94, 54\,\text{mm}$

$z_t = \frac{2\,210 \cdot 21{,}1 + 4\,230 \cdot (-22{,}4)}{6\,440} = -7, 47\,\text{mm}$

Zakreslení do zadání.

$I_y = 3\,911 \cdot 10^3 + 2\,210 \cdot 28, 57^2 + 4\,230 \cdot 14, 93^2 = 6\,657\,788, 9\,\text{mm}^4$

$W_{yd} = \frac{6\,657\,788{,}9}{77{,}53} = 85\,873, 713\,\text{mm}^3$

$W_{yh} = \frac{6\,657\,788{,}9}{97{,}47} = 68\,306, 032\,\text{mm}^3$

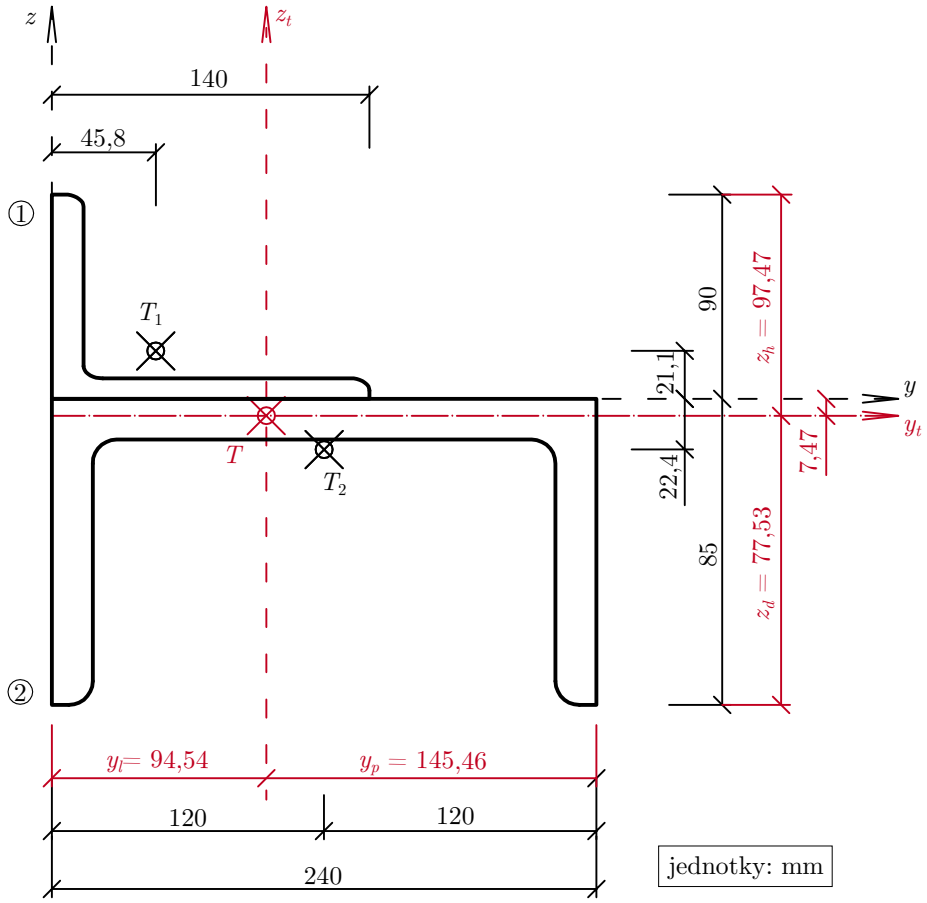
$i_y = \sqrt{\frac{6\,657\,788{,}9}{6\,440}} = 32, 15\,\text{mm}$

$I_z = 40\,409 \cdot 10^3 + 2\,210 \cdot 48, 74^2 + 4\,230 \cdot 25, 46^2 = 48\,400\,984\,\text{mm}^4$

$W_{zl} = \frac{48\,400\,984}{94{,}54} = 511\,963, 02\,\text{mm}^3$

$W_{zp} = \frac{48\,400\,984}{145{,}46} = 332\,744{,}28\,\text{mm}^3$

$i_z = \sqrt{\frac{48\,400\,984}{6\,440}} = 86{,}96\,\text{mm}$



4.E

č.	$A\ [\mathrm{mm}^2]$	y [mm]	z [mm]	$I_y\ [\mathrm{mm}^4]$	$I_z\ [\mathrm{mm}^4]$	dy [mm]	dz [mm]
1.	2 400	46,6	−80	$9,25 \cdot 10^6$	$850 \cdot 10^3$	$104{,}99-46{,}6=$ $58,39$	$-51{,}9-(-80)=$ $28,1$
2.	3 340	165	0	$1,16 \cdot 10^6$	$21,4 \cdot 10^6$	$104{,}99-165=$ $-60,01$	$-51{,}9-0=$ $-51,9$
3.	1 270	57,5	−135,3	$1\,268 \cdot 10^3$	$422 \cdot 10^3$	$104{,}99-57{,}5=$ $47,49$	$-51{,}9-(-135{,}3)=$ $83,4$
$\sum$	7 010			$11\,678 \cdot 10^3$	$22\,672 \cdot 10^3$		

$y_t = \frac{2\,400 \cdot 46{,}6 + 3\,340 \cdot 165 + 1\,270 \cdot 57{,}5}{7\,010} = 104,99\,\mathrm{mm}$

$z_t = \frac{2\,400 \cdot (-80) + 3\,340 \cdot 0 + 1\,270 \cdot (-135{,}3)}{7\,010} = -51,9\,\mathrm{mm}$

Zakreslení do zadání.

$I_y = 11\,678 \cdot 10^3 + 2\,400 \cdot 28,1^2 + 3\,340 \cdot 51,9^2 + 1\,270 \cdot 83,4^2 = 31\,403\,283\,\mathrm{mm}^4$

$W_{yd} = \frac{31\,403\,283}{116{,}1} = 270\,484,78\,\mathrm{mm}^3$

$W_{yh} = \frac{31\,403\,283}{96{,}9} = 324\,079,28\,\mathrm{mm}^3$

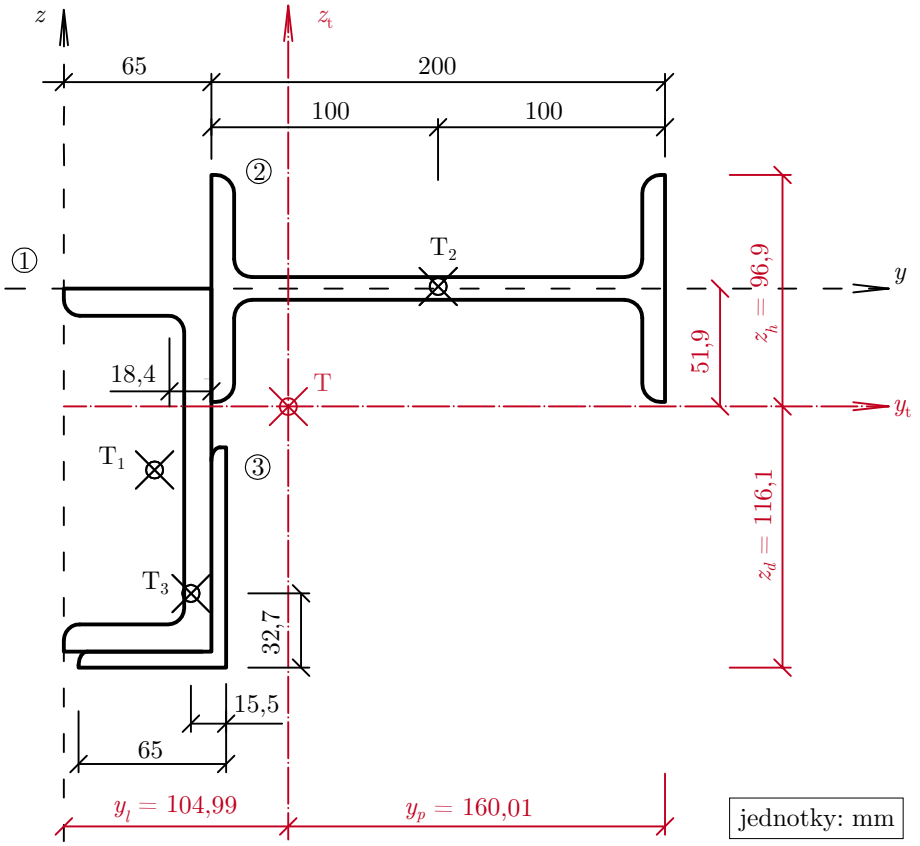
$i_y = \sqrt{\frac{31\,403\,283}{7\,010}} = 66,93\,\mathrm{mm}$

$I_z = 22\,672 \cdot 10^3 + 2\,400 \cdot 58,39^2 + 3\,340 \cdot 60,01^2 + 1\,270 \cdot 47,49^2 = 45\,746\,780\,\mathrm{mm}^4$

$W_{zl} = \frac{45\,746\,780}{104{,}99} = 435\,725,12\,\mathrm{mm}^3$

$W_{zp} = \frac{45\,746\,780}{160{,}01} = 285\,899,51\,\mathrm{mm}^3$

$i_z = \sqrt{\frac{45\,746\,780}{7\,010}} = 80,78\,\mathrm{mm}$



4.F

č.	A [mm^2]	y [mm]	z [mm]	I_y [mm^4]	I_z [mm^4]	dy [mm]	dz [mm]
1.	3 220	100	180, 1	$1\,480 \cdot 10^3$	$19,1 \cdot 10^6$	73,88−100= $-26,12$	138,6−180,1= $-41,5$
2.	2 280	37	80	$9,34 \cdot 10^6$	$0,546 \cdot 10^6$	73,88−37= $36,88$	138,6−80= $58,6$
$\sum$	5 500			$10\,820 \cdot 10^3$	$19,646 \cdot 10^6$		

$y_t = \frac{3\,220 \cdot 100 + 2\,280 \cdot 37}{5\,500} = 73,88\,\text{mm}$

$z_t = \frac{3\,220 \cdot 180,1 + 2\,280 \cdot 80}{5\,500} = 138,6\,\text{mm}$

Zakreslení do zadání.

$I_y = 10\,820 \cdot 10^3 + 3\,220 \cdot 41,5^2 + 2\,280 \cdot 58,6^2 = 24\,195\,074\,\text{mm}^4$

$W_{yd} = \frac{24\,195\,074}{138,6} = 174\,567,63\,\text{mm}^3$

$W_{yh} = \frac{24\,195\,074}{96,4} = 250\,986,24\,\text{mm}^3$

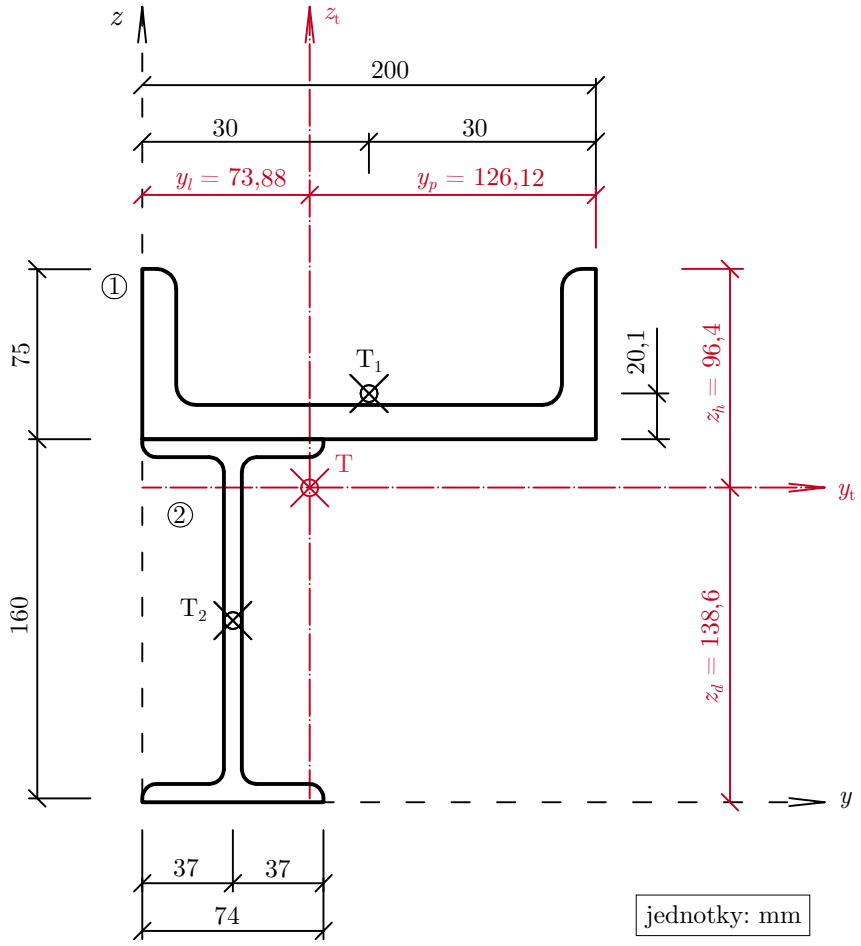
$i_y = \sqrt{\frac{24\,195\,074}{5\,500}} = 66,33\,\text{mm}$

$$I_z = 19,646 \cdot 10^6 + 3\,220 \cdot 26,12^2 + 2\,280 \cdot 36,88^2 = 24\,943\,966\,\text{mm}^4$$

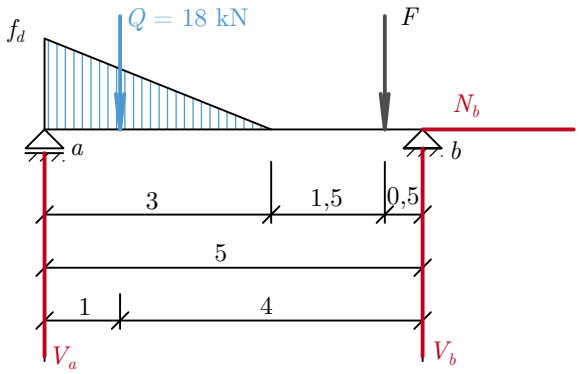
$$W_{zl} = \frac{24\,943\,966}{73,88} = 337\,628,12\,\text{mm}^3$$

$$W_{zp} = \frac{24\,943\,966}{126,12} = 197\,779,62\,\text{mm}^3$$

$$i_z = \sqrt{\frac{24\,943\,966}{5\,500}} = 67,34\,\text{mm}$$



5.4.1.A



$Q = \frac{3 \cdot 12}{2} = 18\,\mathrm{kN}$

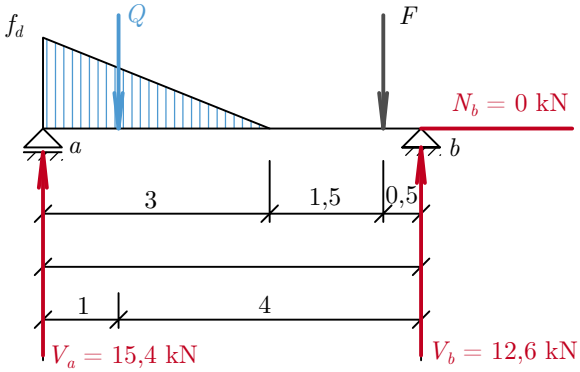
$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_b = 0$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ V_a \cdot 5 - 18 \cdot 4 - 10 \cdot 0,5 = 0;\ V_a = 15,4\,\mathrm{kN}\ \curvearrowright$

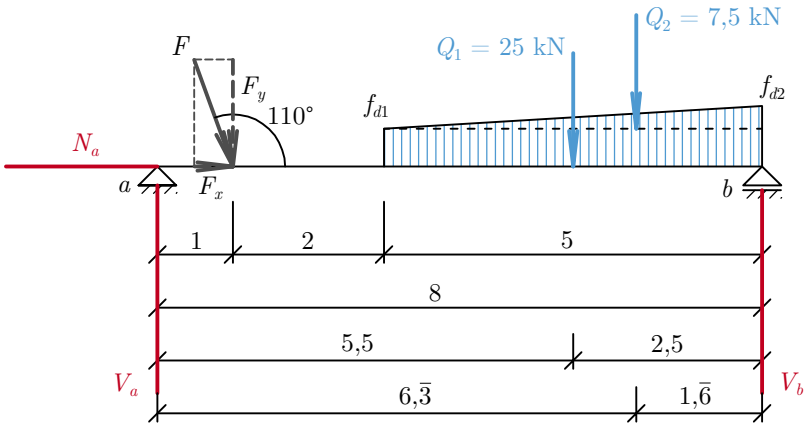
$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ +18 \cdot 1 + 10 \cdot 4,5 + V_b \cdot 5 = 0;\ V_b = -12,6\,\mathrm{kN}\ \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 15,4 - 18 - 10 + 12,6 = 0;\ 0 = 0$

Zakreslení



5.4.1.B



$F_x = 6 \cos 70° = 2,052\,\text{kN}$

$F_y = 6 \sin 70° = 5,638\,\text{kN}$

$Q_1 = 5 \cdot 5 = 25\,\text{kN}$

$Q_2 = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7,5\,\text{kN}$

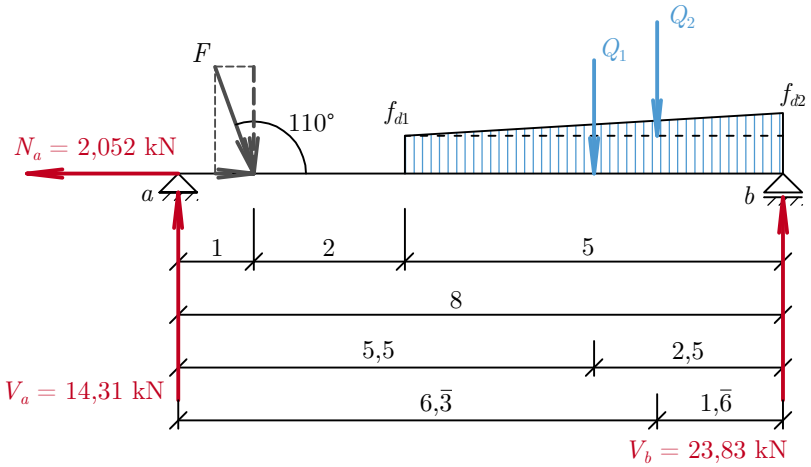
$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_a + 2,052 = 0;\ N_a = -2,052\,\text{kN} \leftarrow$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ V_a \cdot 8 - 5,638 \cdot 7 - 25 \cdot 2,5 - 7,5 \cdot 1,\overline{6} = 0;\ V_a = 14,31\,\text{kN} \curvearrowright$

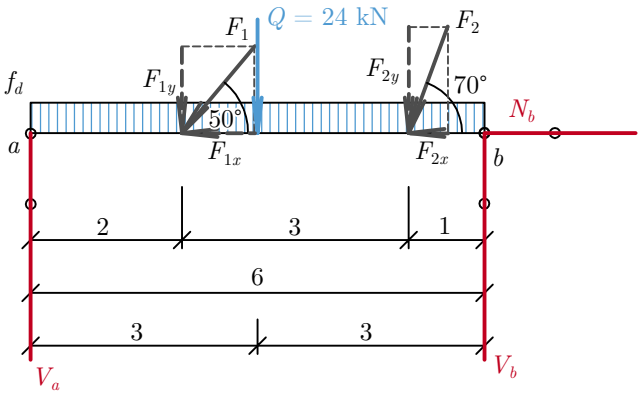
$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ 5,638 \cdot 1 + 25 \cdot 5,5 + 7,5 \cdot 6,\overline{3} + V_b \cdot 8 = 0;\ V_b = -23,83\,\text{kN} \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 14,31 - 5,638 - 25 - 7,5 + 23,83 = 0;\ 0,002 \doteq 0$

Zakreslení



5.4.1.C



$F_{1x} = 8 \cos 50° = 5,142\,\text{kN}$

$F_{1y} = 8 \sin 50° = 6,128\,\text{kN}$

$F_{2x} = 5 \cos 70° = 1,71\,\text{kN}$

$F_{2y} = 5 \sin 70° = 4,698\,\text{kN}$

$Q = 4 \cdot 6 = 24\,\text{kN}$

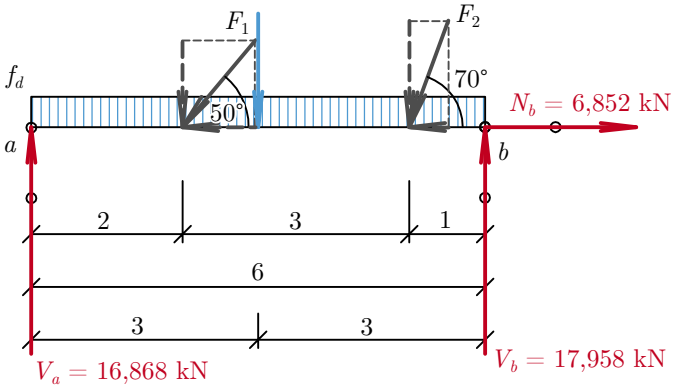
$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ -5,142 - 1,71 + N_b = 0;\ N_b = 6,852\,\text{kN} \rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ V_a \cdot 6 - 6,128 \cdot 4 - 4,698 \cdot 1 - 24 \cdot 3 = 0;\ V_a = 16,868\,\text{kN} \curvearrowright$

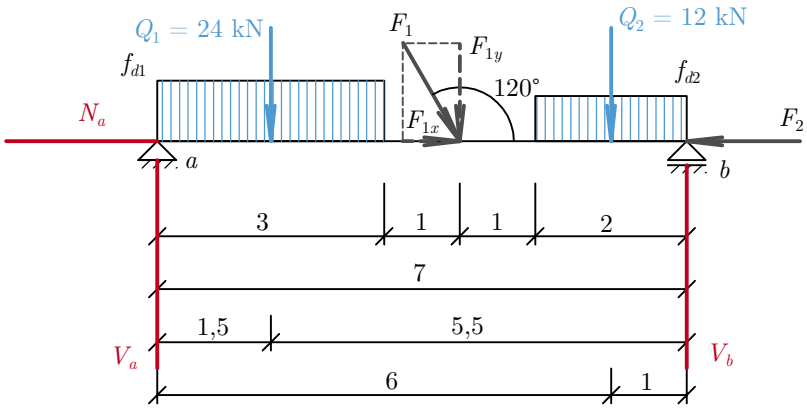
$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ 6,128 \cdot 2 + 4,698 \cdot 5 + 24 \cdot 3 + V_b \cdot 6 = 0;\ V_b = -17,958\,\text{kN} \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 16,868 - 6,128 - 4,698 - 24 + 17,958 = 0;\ 0 = 0$

Zakreslení



5.4.1.D



$F_{1x} = 5 \cos 60° = 2,5\,\text{kN}$

$F_{1y} = 5 \sin 60° = 4,33\,\text{kN}$

$Q_1 = 8 \cdot 3 = 24\,\text{kN}$

$Q_2 = 6 \cdot 2 = 12\,\text{kN}$

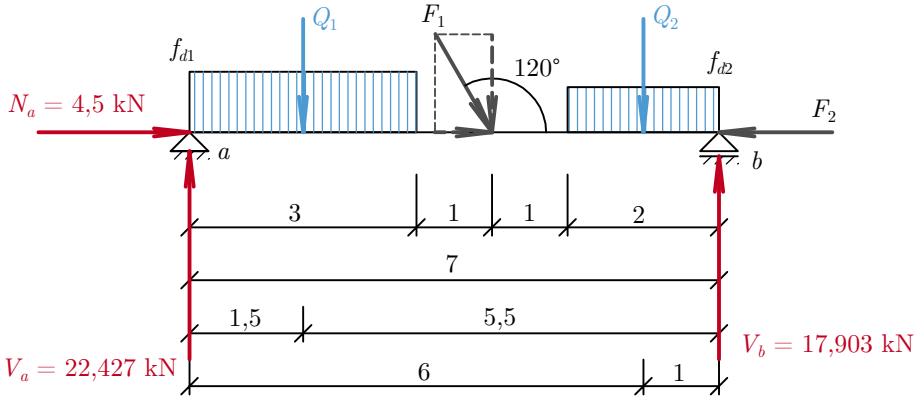
$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_a + 2,5 - 7 = 0;\ N_a = 4,5\,\text{kN} \rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ V_a \cdot 7 - 24 \cdot 5,5 - 4,33 \cdot 3 - 12 \cdot 1 = 0;\ V_a = 22,427\,\text{kN} \curvearrowright$

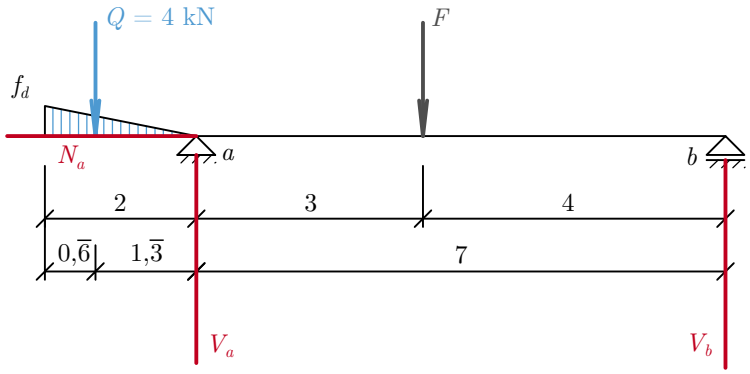
$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ 24 \cdot 1,5 + 4,33 \cdot 4 + 12 \cdot 6 + V_b \cdot 7 = 0;\ V_b = -17,903\,\text{kN} \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 22,427 - 24 - 4,33 - 12 + 17,903 = 0;\ 0 = 0$

Zakreslení



5.4.2.A



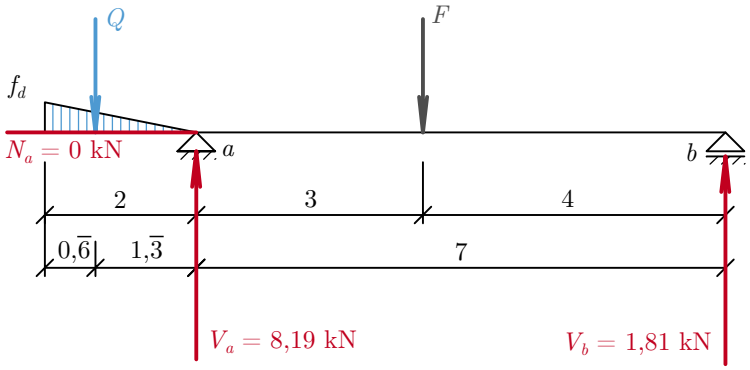
$Q = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4\,\mathrm{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_a = 0$

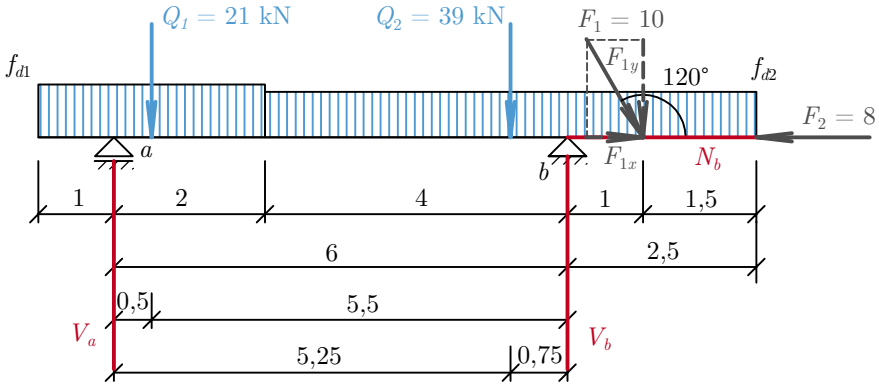
$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ -4 \cdot 8,\overline{3} + V_a \cdot 7 - 6 \cdot 4 = 0;\ V_a = 8,19\,\mathrm{kN}\ \curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ -4 \cdot 1,\overline{3} + 6 \cdot 3 + V_b \cdot 7 = 0;\ V_b = -1,81\,\mathrm{kN}\ \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ -4 + 8,19 - 6 + 1,81 = 0;\ 0 = 0$



5.4.2.B



$Q_1 = 7 \cdot 3 = 21\,\text{kN}$

$Q_2 = 6 \cdot 6,5 = 39\,\text{kN}$

$F_{1x} = 10 \cos 60° = 5\,\text{kN}$

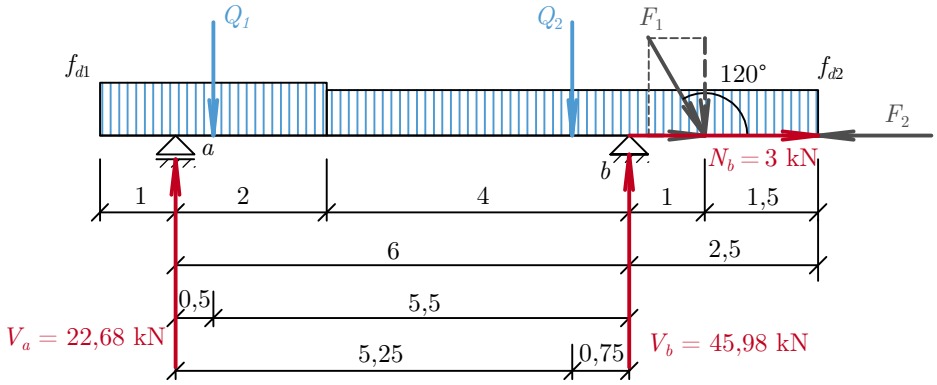
$F_{1y} = 10 \sin 60° = 8,66\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_b + 5 - 8 = 0;\ N_b = 3\,\text{kN} \rightarrow$

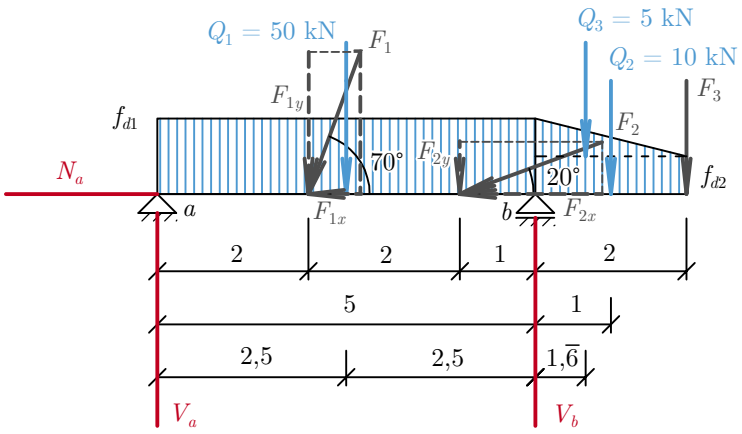
$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ -21 \cdot 5,5 - 39 \cdot 0,75 + 8,66 \cdot 1 + V_a \cdot 6 = 0;\ V_a = 22,68\,\text{kN} \curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ 21 \cdot 0,5 + 39 \cdot 5,25 + V_b \cdot 6 + 8,66 \cdot 7 = 0;\ V_b = -45,98\,\text{kN} \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 22,68 - 21 - 39 + 45,98 - 8,66 = 0;\ 0 = 0$



5.4.2.C



$Q_1 = 10 \cdot 5 = 50\,\text{kN}$

$Q_2 = 5 \cdot 2 = 10\,\text{kN}$

$F_{1x} = 12 \cos 70° = 4,104\,\text{kN}$

$F_{1y} = 12 \sin 70° = 11,276\,\text{kN}$

$F_{2x} = 15 \cos 20° = 14,095\,\text{kN}$

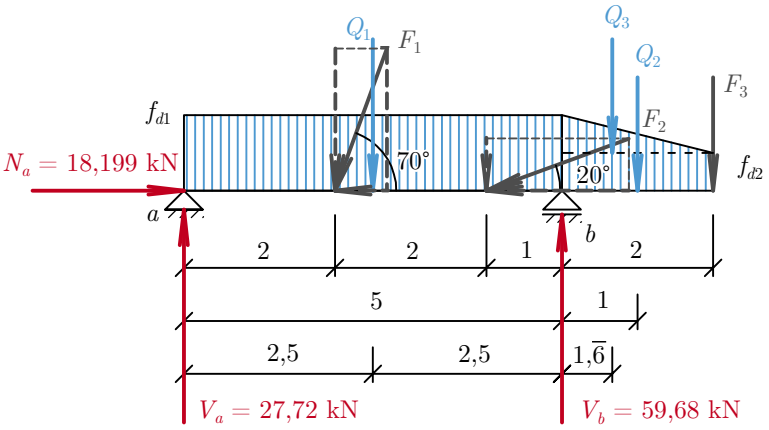
$F_{2y} = 15 \sin 20° = 5,13\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_a - 4,104 - 14,095 = 0;\ N_a = 18,199\,\text{kN} \rightarrow$

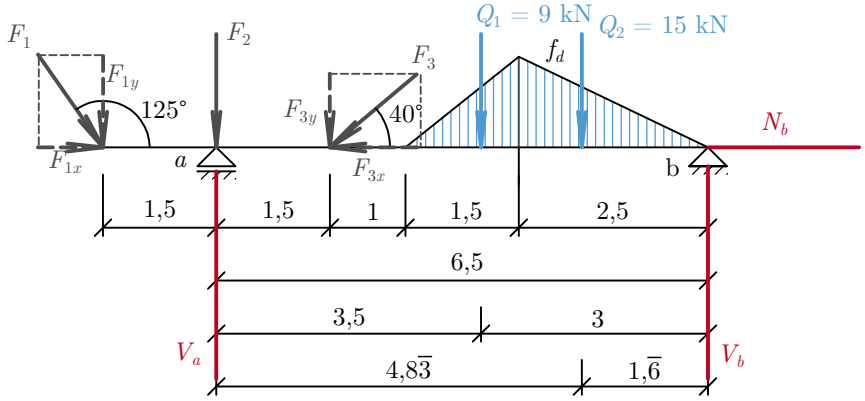
$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ V_a{\cdot}5 - 11,276{\cdot}3 - 50{\cdot}2,5 - 5,13{\cdot}1 + 5{\cdot}0,\overline{6} + 10{\cdot}1 + 6{\cdot}2 = 0;\ V_a = 27,72\,\text{kN} \curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ 11,276{\cdot}2 + 50{\cdot}2,5 + 5,13{\cdot}4 + V_b{\cdot}5 + 5{\cdot}5,\overline{6} + 10{\cdot}6 + 6{\cdot}7 = 0;\ V_b = -59,68\,\text{kN} \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 27,72 - 11,276 - 50 - 5,13 + 59,68 - 5 - 10 - 6 = 0;\ -0,006 \doteq 0$



5.4.2.D



$F_{1x} = 8 \cos 55° = 4,589\,\text{kN}$

$F_{1y} = 8 \sin 55° = 6,553\,\text{kN}$

$F_{3x} = 10 \cos 40° = 7,66\,\text{kN}$

$F_{3y} = 10 \sin 40° = 6,428\,\text{kN}$

$Q_1 = 12 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{2} = 9\,\text{kN}$

$Q_2 = 12 \cdot 2,5 \cdot \frac{1}{2} = 15\,\text{kN}$

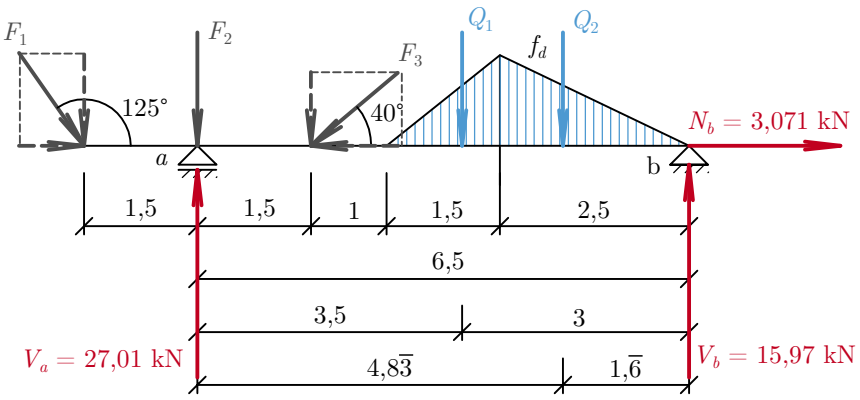
$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ 4,589 - 7,66 + N_b = 0;\ N_b = 3,071\,\text{kN} \rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ -6,553 \cdot 8 - 6 \cdot 6,5 + V_a \cdot 6,5 - 6,428 \cdot 5 + 9 \cdot 3 - 15 \cdot 1,\overline{6} = 0;\ V_a = 27,01\,\text{kN} \curvearrowright$

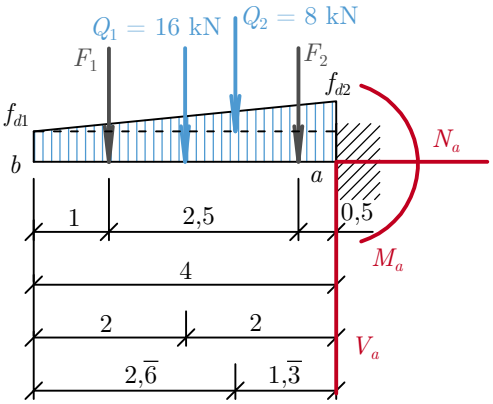
$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ -6,553 \cdot 1,5 + 6 \cdot 0 + 6,428 \cdot 1,5 + 9 \cdot 3,5 + 15 \cdot 4,8\overline{3} + V_b \cdot 6,5 = 0;$

$V_b = -15,97\,\text{kN} \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ -6,553 - 6 + 27,01 - 6,428 - 9 - 15 + 15,97 = 0;\ -0,001 \doteq 0$



5.4.3.A



$Q_1 = 4 \cdot 4 = 16\,\text{kN}$

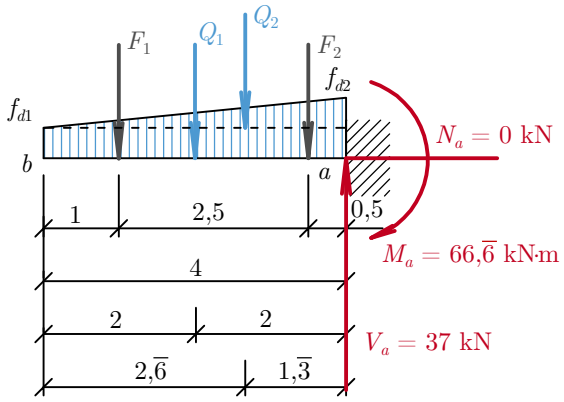
$Q_2 = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_a = 0$

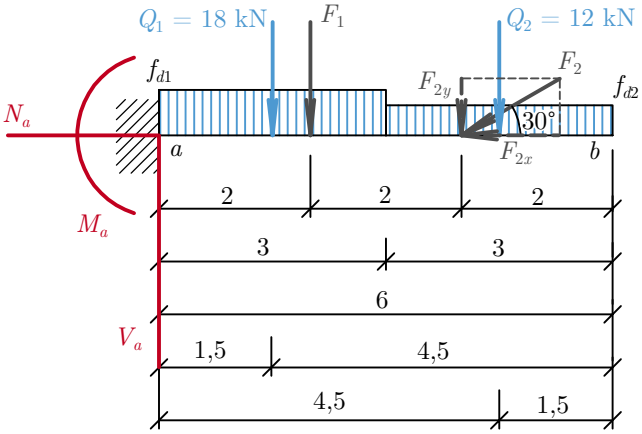
$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ -7 - 16 - 8 - 6 + V_a = 0;\ V_a = 37\,\text{kN} \uparrow$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ -7 \cdot 3 - 16 \cdot 2 - 8 \cdot 1,\overline{3} - 6 \cdot 0,5 + M_a = 0;\ M_a = 66,\overline{6}\,\text{kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ 7 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 8 \cdot 2,\overline{6} + 6 \cdot 3,5 + 66,\overline{6} - 37 \cdot 4 = 0;\ 0 = 0$



5.4.3.B



$Q_1 = 6 \cdot 3 = 18\,\text{kN}$

$Q_2 = 4 \cdot 3 = 12\,\text{kN}$

$F_{2x} = 11 \cos 30° = 9,526\,\text{kN}$

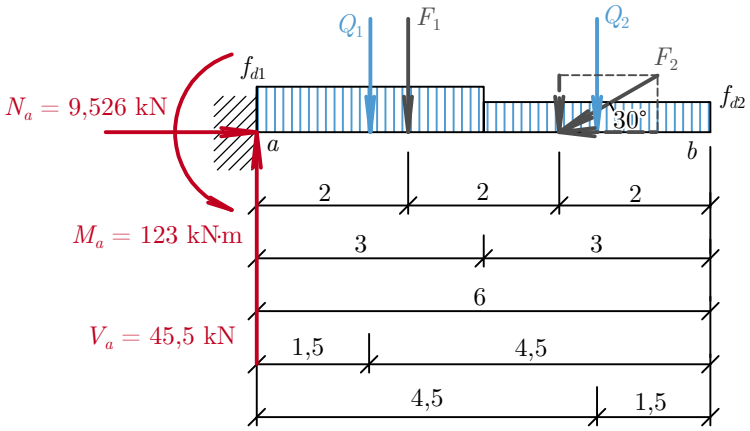
$F_{2y} = 11 \sin 30° = 5,5\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_a - 9,526 = 0;\ N_a = 9,526\,\text{kN} \rightarrow$

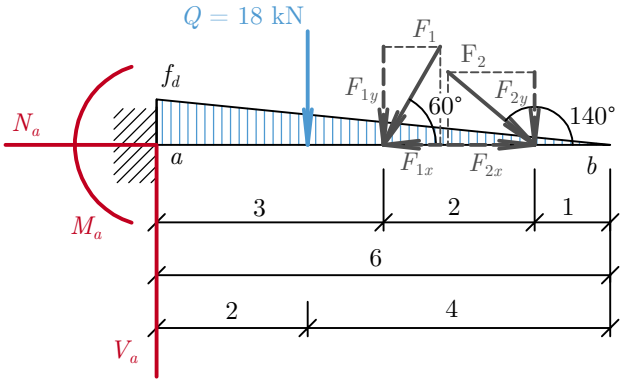
$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ V_a - 18 - 10 - 12 - 5,5 = 0;\ V_a = 45,5\,\text{kN} \uparrow$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ M_a + 18 \cdot 1,5 + 10 + 12 \cdot 4,5 + 5,5 \cdot 4 = 0;\ M_a = -123\,\text{kN} \cdot \text{m}\ \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ -123 + 45,5 \cdot 6 - 18 \cdot 4,5 - 10 \cdot 4 - 5,5 \cdot 2 - 12 \cdot 1,5 = 0;\ 0 = 0$



5.4.3.C



$Q_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18\,\text{kN}$

$F_{1x} = 3\cos 60° = 1,5\,\text{kN}$

$F_{1y} = 3\sin 60° = 2,598\,\text{kN}$

$F_{2x} = 5\cos 40° = 3,83\,\text{kN}$

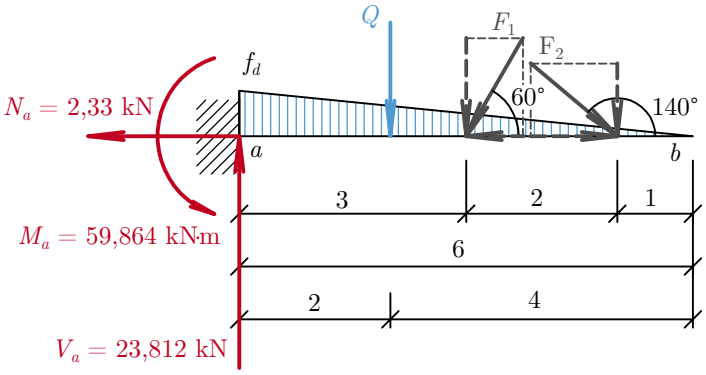
$F_{2y} = 5\sin 40° = 3,214\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_a - 1,5 + 3,83 = 0;\ N_a = -2,33\,\text{kN} \leftarrow$

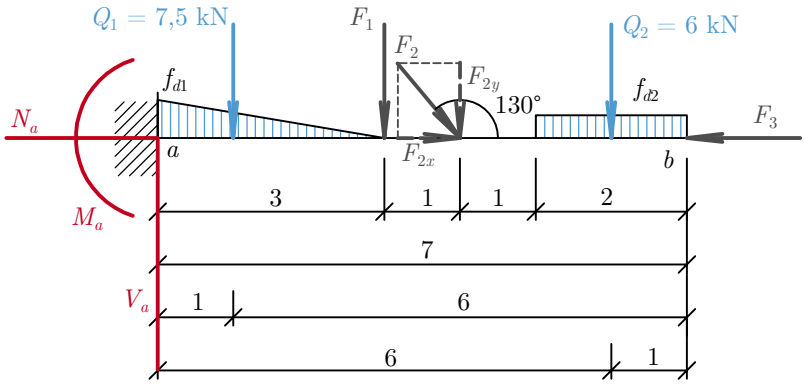
$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ V_a - 18 - 2,598 - 3,214 = 0;\ V_a = 23,812\,\text{kN} \uparrow$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ M_a + 18 \cdot 2 + 2,598 \cdot 3 + 3,214 \cdot 5 = 0;\ M_a = -59,864\,\text{kN} \cdot \text{m} \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ -59,684 + 23,812 \cdot 6 - 18 \cdot 4 - 2,598 \cdot 3 - 3,214 \cdot 1 = 0;\ 0 = 0$



5.4.3.D



$Q_1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = 7,5\,\text{kN}$

$Q_2 = 3 \cdot 2 = 6\,\text{kN}$

$F_{2x} = 15 \cos 50° = 9,642\,\text{kN}$

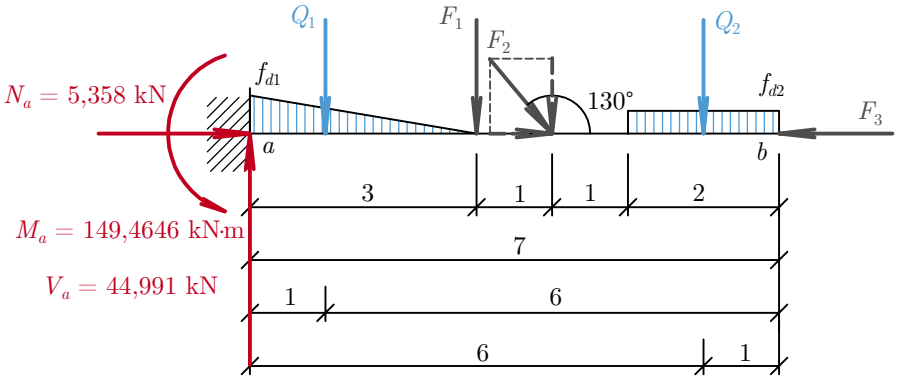
$F_{2y} = 15 \sin 50° = 11,491\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_a + 9,642 - 15 = 0;\ N_a = 5,358\,\text{kN} \rightarrow$

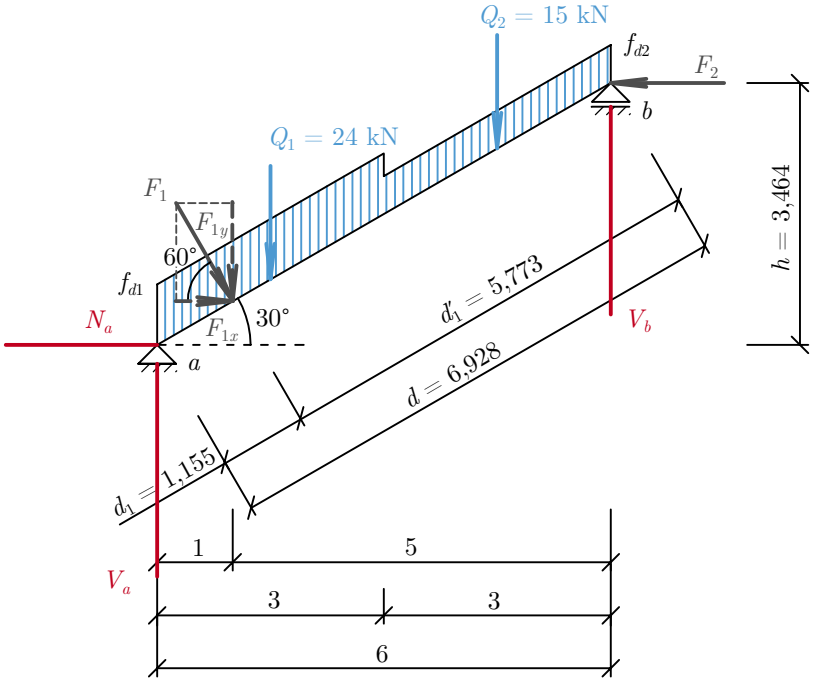
$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ V_a - 7,5 - 20 - 11,491 - 6 = 0;\ V_a = 44,991\,\text{kN} \uparrow$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ M_a + 7,5 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 11,491 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 0;\ M_a = -149,464\,\text{kN} \cdot \text{m}\ \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ -149,464 + 44,991 \cdot 7 - 7,5 \cdot 6 - 20 \cdot 4 - 11,491 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0;\ 0 = 0$



5.4.4.A



$Q_1 = 8 \cdot 3 = 24\,\text{kN}$

$Q_2 = 5 \cdot 3 = 15\,\text{kN}$

$F_{1x} = 8 \cos 60° = 4\,\text{kN}$

$F_{1y} = 8 \sin 60° = 6,928\,\text{kN}$

$\tan 30° = \frac{h}{6};\ h = 6 \tan 30°;\ h = 3,464\,\text{m}$

$\cos 30° = \frac{6}{d};\ d = \frac{6}{\cos 30°} = 6,928\,\text{m}$

$d_1 = \frac{1}{\cos 30°} = 1,155\,\text{m}$

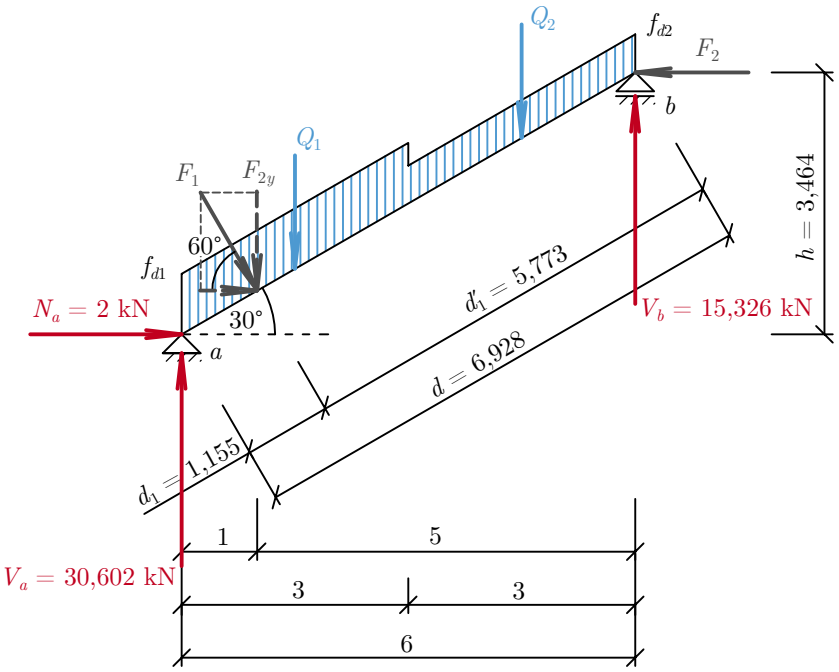
$d_1' = 6,928 - 1,155 = 5,773\,\mathrm{m}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ N_a + 4 - 6 = 0;\ N_a = 2\,\mathrm{kN} \rightarrow$

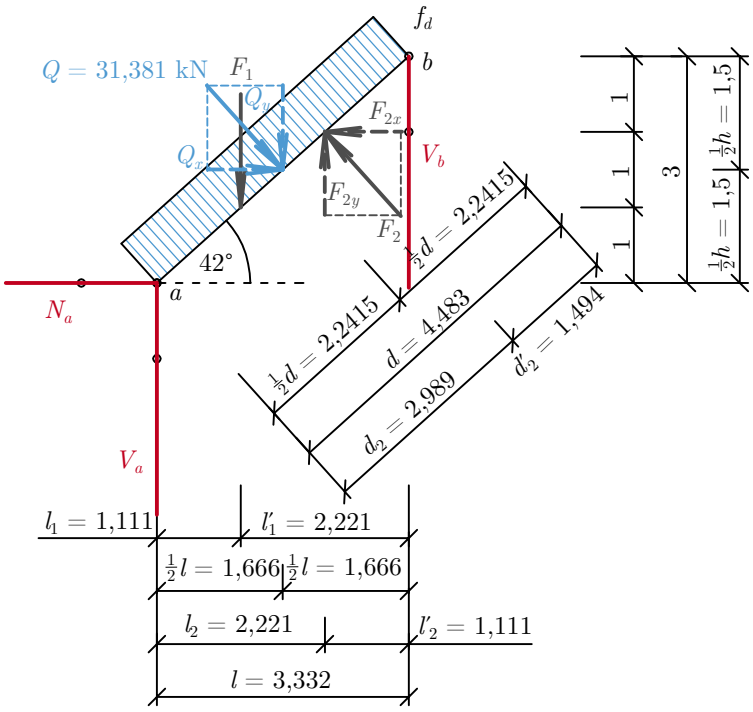
$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ -2 \cdot 3,464 + V_a \cdot 6 - 8 \cdot 5,773 - 24 \cdot 4,5 - 15 \cdot 1,5 = 0;\ V_a = 30,602\,\mathrm{kN}\ \curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0;\ 8 \cdot 1,155 + 24 \cdot 1,5 + 15 \cdot 4,5 - 6 \cdot 3,464 + V_b \cdot 6 = 0;\ V_b = -15,326\,\mathrm{kN}\ \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 30,602 - 6,928 - 24 - 15 + 15,326 = 0;\ 0 = 0$



5.4.4.B



$F_{2x} = 15 \cos 48° = 10{,}037\,\text{kN}$

$F_{2y} = 15 \sin 48° = 11{,}147\,\text{kN}$

$\tan 42° = \frac{3}{l}$; $l = \frac{3}{\tan 42°} = 3{,}332\,\text{m}$; $l_1 = \frac{1}{\tan 42°} = 1{,}111\,\text{m}$

$\sin 42° = \frac{3}{d}$; $d = \frac{3}{\sin 42°} = 4{,}483\,\text{m}$; $d_2 = \frac{2}{\sin 42°} = 2{,}989\,\text{m}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$; $N_a + 21 - 10{,}037 = 0$; $N_a = -10{,}963\,\text{kN} \leftarrow$

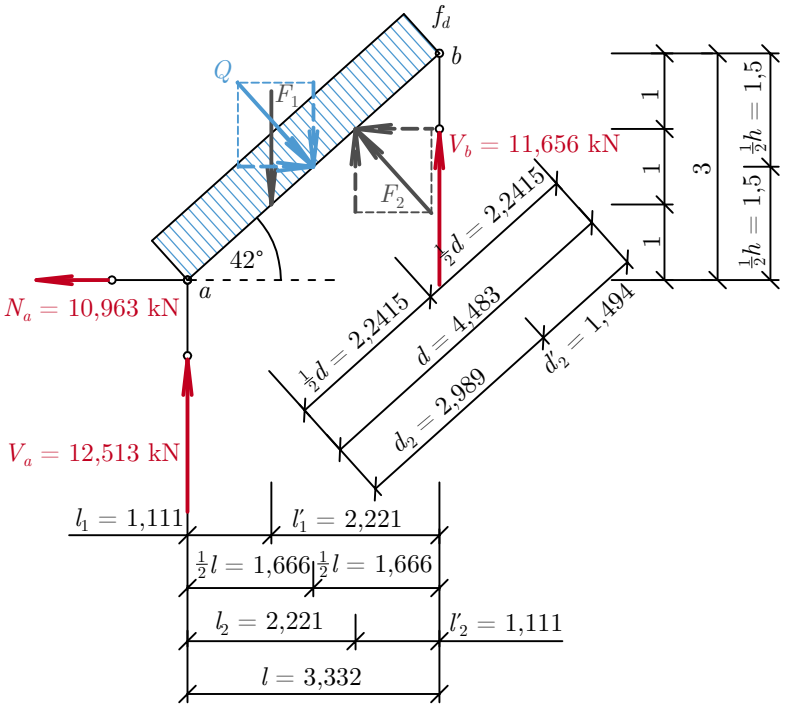
$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0$; $V_a \cdot 3{,}332 - 12 \cdot 2{,}221 - 31{,}381 \cdot 2{,}2415 + 15 \cdot 1{,}494 + 10{,}963 \cdot 3 = 0$;

$V_a = 12{,}513\,\text{kN} \curvearrowright$

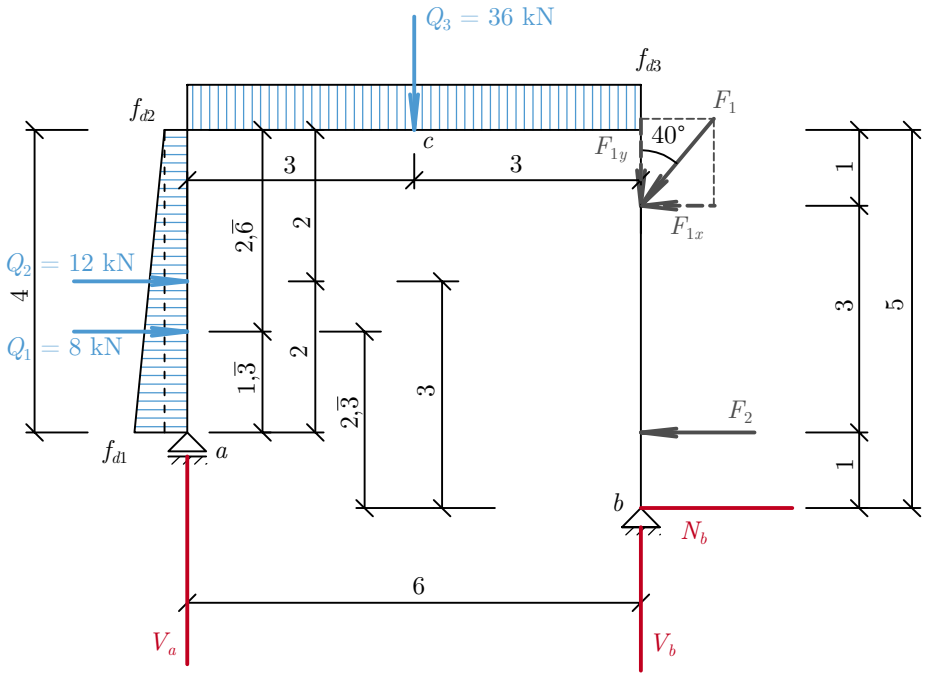
$Q = 4{,}483 \cdot 7 = 31{,}381\,\text{kN}$; $Q_x = 31{,}381 \cos 48° = 21\,\text{kN}$; $Q_y = 31{,}381 \sin 48° = 23{,}32\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ia} = 0$; $12 \cdot 1{,}111 + 31{,}381 \cdot 2{,}2415 - 15 \cdot 2{,}989 + V_b \cdot 3{,}332 = 0$; $V_b = -11{,}656\,\text{kN} \curvearrowleft$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$; $12{,}513 - 12 - 23{,}32 + 11{,}147 + 11{,}656 = 0$; $-0{,}004 \doteq 0$



5.4.5.A



$Q_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8\,\mathrm{kN}$

$Q_2 = 4 \cdot 3 = 12\,\text{kN}$

$Q_3 = 6 \cdot 6 = 36\,\text{kN}$

$F_{1x} = 8 \sin 40° = 5,142\,\text{kN}$

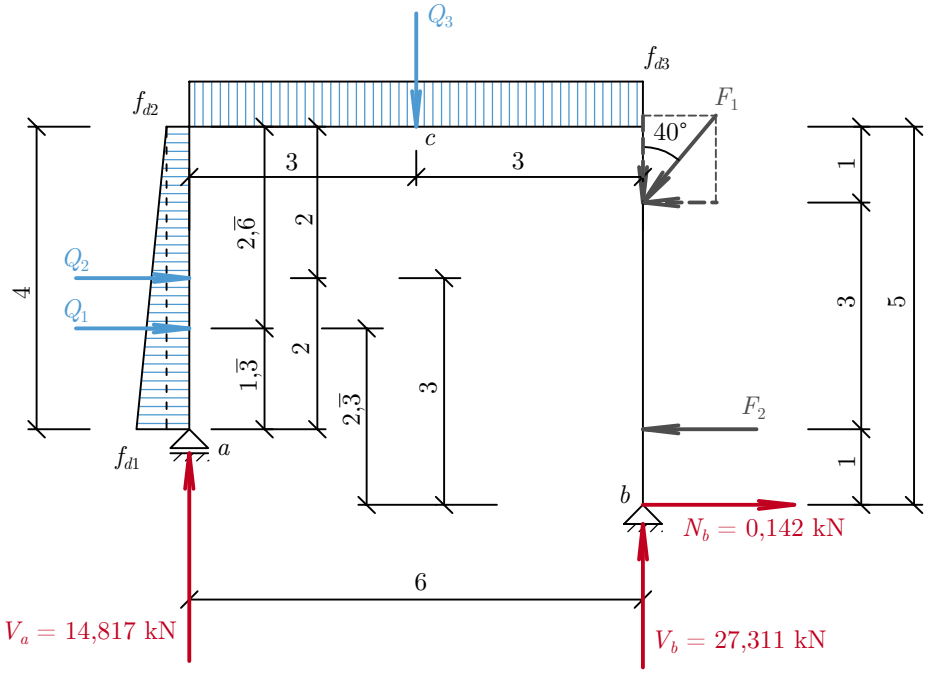
$F_{1y} = 8 \cos 40° = 6,128\,\text{kN}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ 8 + 12 - 5,142 - 15 + N_b = 0;\ N_b = 0,142\,\text{kN} \rightarrow$

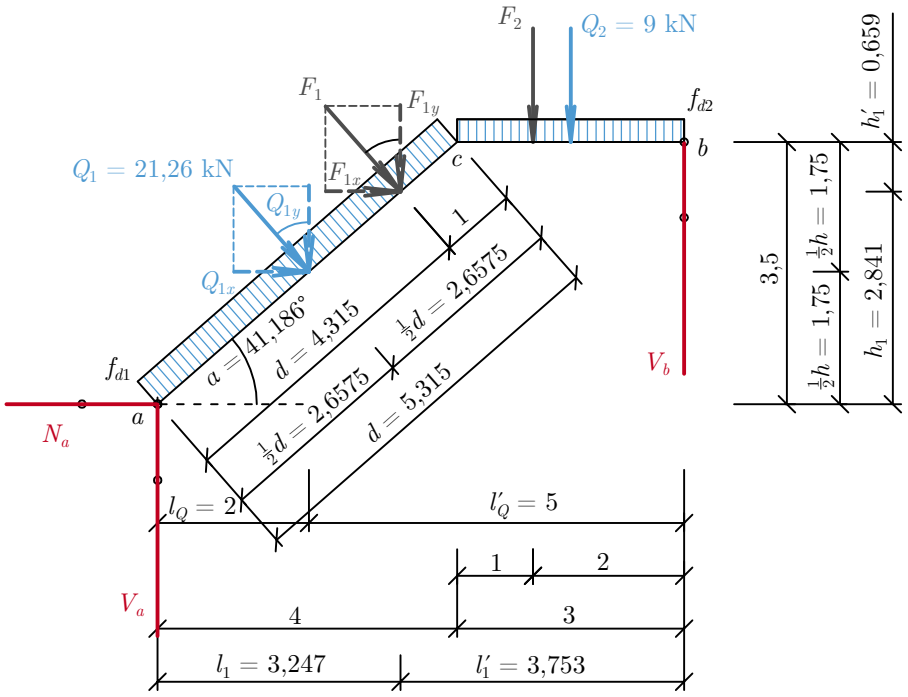
$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0;\ V_a \cdot 6 + 8 \cdot 2,\overline{3} + 12 \cdot 3 - 36 \cdot 3 - 5,142 \cdot 4 - 15 \cdot 1 = 0;\ V_a = 14,817\,\text{kN} \curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 14,817 - 36 - 6,128 + V_b = 0;\ V_b = 27,311\,\text{kN} \uparrow$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} M_{ic} = 0;\ -8 \cdot 2,\overline{6} - 12 \cdot 2 + 14,817 \cdot 3 + 6,128 \cdot 3 + 5,142 \cdot 1 + 15 \cdot 4 - 27,311 \cdot 3 - 0,142 \cdot 5 = 0;\ 0,0007 \doteq 0$



5.4.5.B



$\tan\alpha = \frac{3{,}5}{4}$; $\alpha = 41{,}186°$

$d = \sqrt{4^2 + 3{,}5^2} = 5{,}315\,\text{m}$

$Q_1 = 5{,}315 \cdot 4 = 21{,}26\,\text{kN}$

$Q_2 = 3 \cdot 3 = 9\,\text{kN}$

$F_{1x} = 6\sin 41{,}186° = 3{,}951\,\text{kN}$

$F_{1y} = 6\cos 41{,}186° = 4{,}515\,\text{kN}$

$d_1 = 5{,}315 - 1 = 4{,}315\,\text{m}$

$l_1 = 4{,}315\cos 41{,}186° = 3{,}247\,\text{m}$

$h_1 = 4{,}315\sin 41{,}186° = 2{,}841\,\text{m}$

$Q_{1x} = 21{,}26\sin 41{,}186° = 14\,\text{kN}$

$Q_{1y} = 21{,}26\cos 41{,}186° = 16\,\text{kN}$

$l'_1 = 7 - 3{,}247 = 3{,}753\,\text{m}$

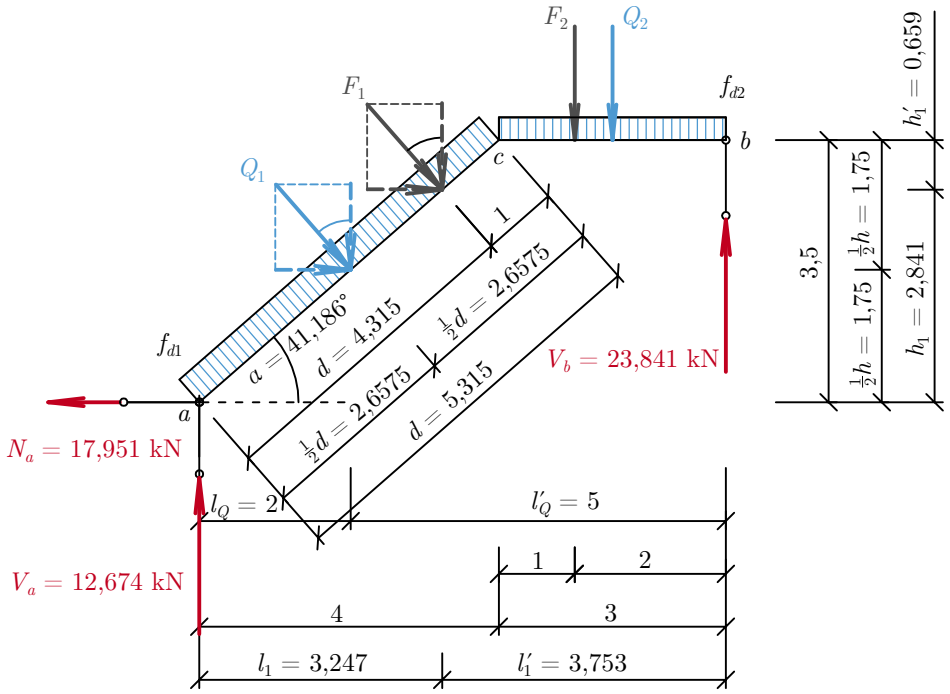
$h'_1 = 3{,}5 - 2{,}841 = 0{,}659\,\text{m}$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$; $N_a + 14 + 3{,}951 = 0$; $N_a = -17{,}951\,\text{kN}\ \leftarrow$

$\sum_{i=1}^{n} M_{ib} = 0$; $+17{,}951 \cdot 3{,}5 + V_a \cdot 7 - 14 \cdot 1{,}75 - 16 \cdot 5 - 3{,}951 \cdot 0{,}659 - 4{,}515 \cdot 3{,}753 - 7 \cdot 2 - 9 \cdot 1{,}5 = 0$; $V_a = 12{,}674\,\text{kN}\ \curvearrowright$

$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ 12,674 - 16 - 4,515 - 7 - 9 + V_b = 0;\ V_b = 23,841\,\text{kN} \uparrow$

Zkouška: $\sum_{i=1}^{n} M_{ic} = 0;\ 12,674 \cdot 4 + 17,951 \cdot 3,5 - 14 \cdot 1,75 - 16 \cdot 2 - 3,951 \cdot 0,659 - 4,515 \cdot 0,753 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 1,5 - 23,841 \cdot 3 = 0;\ -0,002 \doteq 0$



Příručku vytvořila *Ing. Karla Labudová*, vyučující odborných předmětů
na Střední průmyslové škole stavební, Opava, příspěvková organizace.
Příručka je určena pro výuku stavební mechaniky
na středních odborných školách stavebních oboru 36-47-M/01 Stavebnictví.
Je v souladu s rámcovými vzdělávacími programy.

Sazba Mgr. Ivo Rychtar
Grafika Tomáš Prokš

Vytvořeno v rámci projektu OP VK CZ.1.07/1.1.07/11.0112
Podpora odborného vzdělávání na středních školách MSK

Vytvořeno za finanční podpory Evropského sociálního fondu
a rozpočtu České republiky.

Autorská práva pod licencí Creative Commons.

Dílo smíte šířit, za podmínky, že uvedete autora,
nebudete dílo využívat komerčně a nebude do něj zasahovat.

Publikace neprošla jazykovou kontrolou.

1. vydání – jaro 2011
2. revidované vydání – jaro 2013